Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas
y de la Especialización en Estadística Aplicada

Formulación variacional para problemas de difusión anómala unidimensionales

Tesina que se presenta para optar al grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:
Genner Pineda Ceballos

Director de Tesina:
Dr. Luis Fernando López Ríos
IIMAS

Ciudad de México, 2024

A mi mamá y papá.

Agradecimientos

Expreso mi profundo agradecimiento al Dr. Luis Fernando López Ríos, cuya guía y apoyo constante fueron fundamentales en la realización de esta tesina. Su vasto conocimiento y precisa orientación resultaron esenciales para alcanzar los objetivos planteados en este trabajo.

Quiero también extender mi gratitud a todos quienes me acompañaron a lo largo de este proceso; su presencia y ánimo me motivaron a dar lo mejor de mí. En particular, deseo mencionar a mis amigos Mauro Félix Castañeda, Mario Nolasco, Jonathan Naffrichoux, Edwin Aguilar Anzures, Ramón Poo y Juan Fichtl. Su calidez humana, su brillantez como matemáticos y los innumerables momentos compartidos han enriquecido mi formación académica de una manera invaluable.

Finalmente deseo expresar mi sincero agradecimiento a mis padres por su comprensión y apoyo durante mis momentos de mayor ocupación. También quiero agradecer a mis amigos de la UNAL, Andrés Angulo, Camilo Ceballos y Ronald Palencia, por mantener el contacto a pesar de la distancia. Además, agradezco profundamente a Regina Domínguez por su compañía inestimable a lo largo de este proceso.

Genner Pineda Ceballos.

Introducción

El cálculo fraccionario, el cual estudia la derivación e integración en órdenes no enteros, ha ganado notable relevancia en las últimas décadas debido a la precisión de los modelos fraccionarios en diversos problemas de la ingeniería, ciencias naturales y finanzas [2, 4, 16]. Usaremos las expresiones “derivada e integral fraccionaria” para referirnos a estos operadores, aunque en la teoría moderna, el orden de diferenciación puede ser cualquier complejo.

El interés matemático por estos operadores comenzó en 1695, cuando L'Hôpital le escribió a Leibniz preguntando por el significado de un operador en derivadas de orden fraccionario, motivado por la notación de este. Aunque la respuesta de Leibniz fue casi profética acerca del posible impacto de este tipo de operadores, no aportó claridad a la definición de este operador [27]. En 1797, Lacroix avanzó formalmente en la teoría, generalizando la derivación fraccionaria con una fórmula específica para monomios con exponentes reales [25]. En 1822, Fourier aportó una representación integral de la derivada fraccionaria [15], dando una base más concreta al concepto.

El primer uso de los operadores fraccionarios para resolver un problema físico significativo se remonta a 1823, cuando Abel aplicó la antiderivada de orden fraccionario al problema de la tautocrona [1]. Este problema consiste en determinar una curva tal que el tiempo de descenso de una bola sin fricción, bajo la acción de la gravedad, sea independiente del punto de lanzamiento. Abel demostró que esta curva estaba relacionada con una derivación de orden no entero. Estos descubrimientos inspiraron a Liouville, quien amplió las aplicaciones de los operadores fraccionarios a la teoría de potenciales y fue el primero en intentar resolver ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias [29], aunque su desarrollo continuó limitado a funciones específicas.

Por su parte, Riemann contribuyó a una formulación más general de la derivación e integración fraccionaria, en un trabajo que desarrolló durante sus estudios de licenciatura, sin embargo sus avances nunca los publicó y solo fueron conocidos póstumamente en 1892 [6] y aún entonces generaron confusión. Estos operadores consiguieron las formulaciones modernas (2.2) y (2.5) hacia 1884 con Laurent [26], quien, apoyado en los trabajos de Sonin y Letnikov [35, 28], formalizó la integración y derivación fraccionarias. Para más detalles sobre el desarrollo histórico de estos operadores se recomienda el Capítulo 1 de [31]. Actualmente las derivadas e integrales fraccionarias encontraron un alto nivel de formalidad debido al desarrollo de los espacios de Sobolev y la teoría de interpolación durante el siglo XX.

En el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, la no localidad de estos operadores produce modelos de alta precisión para fenómenos con difusiones anómalas y con memoria [4, 33], debido a la importancia de esta clase de fenómenos, la investigación en EDP fraccionarias ha conseguido un gran interés en las últimas décadas. En este trabajo se usan las técnicas desarrolladas en [21, 33, 13] para encontrar resultados de existencia, unicidad y regularidad en la solución variacional de la ecuación de difusión anómala estacionaria (1.1) para un potencial q no negativo. En [21] se aborda un problema con un potencial q más general usando la Suposición 4.1, en esta tesina se consigue estos mismos resultados sin usar directamente dicha suposición.

Este trabajo se organiza en tres capítulos: el Capítulo 1 ofrece una motivación física para la ecuación de difusión anómala estacionaria y se enuncia los resultados fundamentales sobre su existencia, unicidad y regularidad. En el Capítulo 2, se introducen definiciones formales de derivadas e integrales fraccionarias y se definen los espacios relevantes para la formulación variacional de (1.1). Finalmente, en el Capítulo 3, se implementa un método variacional para resolver (1.1) y se prueban los resultados principales.

Índice general

Capítulo 1

Modelos con derivadas fraccionarias: Motivación y resultados principales

En este capítulo se motiva el estudio de ecuaciones diferenciales con derivada fraccionaria de Riemann-Liouville correspondientes al caso estacionario de modelos con difusión anómala. Se enuncian los principales resultados relacionados con la existencia, unicidad y regularidad de una solución variacional al problema, cuyos desarrollos y demostraciones son el tema central de esta tesina. Además, se analiza el impacto de estos resultados en la estabilidad de la solución y su relevancia dentro del modelo evolutivo de difusión anómala.

1.1. Problema fraccionario

En este trabajo se aborda el estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarias en un intervalo acotado $D := (0, 1)$, con término fuente f,

$$\begin{cases} -\,{}_0D_x^{\alpha} u + qu = f \quad \text{en } D, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Aquí ${}_0D_x^{\alpha}$ denota la derivada de Riemann-Liouville (ver Definición 2.5), donde $\alpha \in (1, 2)$. El potencial $q \in L^{\infty}(D)$ es una función medible. Por otro lado la fuente f se toma en $L^2(D)$.

La ecuación diferencial (1.1), se puede escribir en la siguiente forma variacional

Definición 1.1 (Forma variacional de (1.1))**.** Dados $q \in L^{\infty}(D)$ y $f \in L^2(D)$, encontrar un $u \in U := \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \text{ para todo } v \in U, \tag{1.2}$$

donde la forma bilineal $a(u,v)$ asociada al problema variacional se define como

$$a(u,v) := -({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}v) + (qu,v), \quad u,v \in U.$$

Es importante mencionar que en todo este trabajo el producto interno $(\cdot,\cdot)$ corresponde al producto interior usual en el espacio $L^2(D)$. El espacio $U := \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ es adecuado para definir el problema variacional, dado que en este espacio se pueden manejar correctamente las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orden $\alpha/2$, y además, todos sus elementos satisfacen las condiciones de Dirichlet impuestas en (1.1). Un análisis detallado de la elección del espacio U se presenta en la Sección 3.2.

El objetivo de este trabajo es demostrar con rigurosidad los Teoremas 1.1 y 1.2. Empezamos enunciando el teorema de existencia y unicidad.

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de una solución variacional)**.** *Suponga que el potencial $q \in L^\infty(D)$ satisface $q \geq 0$. Entonces para cada $f \in L^2(D)$ se tiene que existe una única solución $u \in U$ que satisface el problema variacional* (1.2)*. Más aún, para algún $C > 0$ independiente de u y f se tiene que*

$$||u||_U \leq C||f||_{L^2(D)}.$$

El Teorema 1.1 garantiza la existencia y unicidad de una solución variacional para el problema (1.2), pero la solución pertenece al espacio U y no necesariamente a $H^\alpha(D)$, el espacio en el que está definida la derivada fraccionaria de orden α que actúa en (1.1). Sin embargo, se demuestra en la Sección 3.1 que si $q \equiv 0$, entonces la solución variacional es una solución fuerte, en el sentido de que $u \in H^\alpha(D)$. En este caso, la solución tiene una representación explícita dada por $u(x) = -{}_0I_x^\alpha f + ({}_0I_x^\alpha f)(1)x^{\alpha-1}$.

Intuitivamente, el Teorema 1.1 nos garantiza que la solución de (1.2) podrá derivarse hasta un orden $\alpha/2$, pero el teorema de aumento de regularidad nos permite derivar hasta un orden superior, siendo este $\alpha - 1 + \beta$ para cualquier $\beta \in (1-\alpha/2, 1/2)$, formalmente,

Teorema 1.2 (Aumento de regularidad en la solución)**.** *Con las mismas suposiciones sobre q presentadas en el Teorema 1.1, si $f \in L^2(D)$ entonces la solución u del problema* (1.2) *está en $H^{\alpha-1+\beta}(D) \cap \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ para cualquier $\beta \in (1-\alpha/2, 1/2)$ y satisface que*

$$||u||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} \leq C||f||_{L^2(D)},$$

para algún $C > 0$ independiente de u y f.

1.2. Conexiones con la difusión anómala

Los resultados obtenidos para el problema (1.1) son esenciales para entender el modelo de difusión anómala (1.4), en especial su estabilidad, entendida como el comportamiento de la solución de un problema evolutivo cuando el tiempo tiende a infinito. En esta sección, nos enfocaremos en el modelo más general de difusión anómala (1.3), con el objetivo de proporcionar una perspectiva física más amplia.

La difusión se entiende como un fenómeno de transporte, generado principalmente por el movimiento aleatorio microscópico de partículas dentro de un medio. Diversos modelos de reacción-difusión han demostrado ser congruentes en la descripción de la difusión en diversos contextos; véase [32, 8] para más detalles. La forma más simple de la ecuación de reacción-difusión en una dimensión espacial es

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R(u).$$

En esta ecuación, la difusión está representada por el operador laplaciano unidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que se deriva de la suposición de que el movimiento aleatorio es un proceso estocástico gaussiano. Sin embargo, se han observado fenómenos en los que la difusión gaussiana no se cumple. Ejemplos de difusiones no gaussianas se encuentran en el experimento realizado en [17], en las turbulencias de plasma en tres dimensiones descritas en [5], y en estudios sobre el transporte de partículas en [9]. Estos fenómenos de difusión anómala motivan un importante problema abierto: entender las dinámicas de reacción-difusión cuando las hipótesis de la difusión gaussiana no se cumplen. Estas hipótesis no se cumplen cuando ocurren saltos anómalamente largos de partículas o correlaciones de largo alcance en la dinámica de ciertos fenómenos físicos. Las correlaciones de largo alcance nos llevan a procesos subdifusivos, en los cuales la ecuación de difusión incluye una derivada fraccionaria en el tiempo; véase [30] para más detalles. Los saltos anómalamente largos de partículas nos conducen a procesos superdifusivos, los cuales se describen mediante la ecuación de difusión fraccionaria espacial propuesta en [3, 10], la cual está dada por

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \mathbf{D}_\theta^\alpha z + q(x)z = h(x,t), \quad \text{en } D,\ t > 0. \tag{1.3}$$

Para un término fuente $h(x,t)$ y un potencial $q \in L^\infty(D)$ no negativo. El operador $\mathbf{D}_\theta^\alpha z := \theta\, {}_0D_x^\alpha z + (1-\theta)\, {}_xD_1^\alpha z$ está compuesto por las derivadas de Riemann-Liouville izquierda y derecha ${}_0D_x^\alpha$ y ${}_xD_1^\alpha$, vistas como derivadas parciales en el espacio. Estas derivadas fraccionarias representan físicamente difusiones no locales, donde el parámetro de asimetría $\theta \in [0,1]$ nos permite determinar en qué lado del intervalo espacial las partículas tienen una mayor difusión. Por lo tanto, la derivada $\mathbf{D}_\theta^\alpha z$ puede interpretarse como una ley de Fick no local [7]. Una pregunta que surge es: en caso de que exista solución, ¿cómo se comportará esta cuando $t \to \infty$? Esta pregunta se responde para un caso particular del modelo (1.3) estudiando la ecuación diferencial fraccionaria (1.1), como veremos a continuación.

1.3. Estabilidad para un modelo homogéneo de difusión anómala

Muchos fenómenos de difusión anómala [3, 10] se centran en procesos simétricos que conducen a difusiones simétricas ($\theta = 1/2$). Sin embargo, diversos fenómenos físicos, como plasmas magnetizados y flujos geofísicos [9, 34], han mostrado experimentalmente difusiones no simétricas e incluso totalmente asimétricas [11]. Observe que la ecuación (1.1) es el caso estacionario y totalmente asimétrico con $\theta = 1$ de (1.3). En esta sección se muestra el impacto que tienen los Teoremas 1.1 y 1.2 en el estudio de la estabilidad del modelo de difusión anómala homogéneo y totalmente asimétrico con $\theta = 1$,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - {}_0D_x^\alpha z + q(x)z = 0, \quad \text{en } D,\ t > 0, \\ z(x,0) = g(x), \quad \text{en } D, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde g es cierto valor inicial.

Al buscar soluciones de (1.4) con variables separadas $z(x,t) = u(x)v(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= z_t(x,t) - {}_0D_x^\alpha z(x,t) + q(x)z(x,t) \\ &= u(x)v_t(t) - v(t)\,{}_0D_x^\alpha u(x) + q(x)u(x)v(t) \\ &= u(x)v_t(t) + v(t)\left(-\,{}_0D_x^\alpha u(x) + q(x)u(x)\right). \end{aligned}$$

Cuando separamos los términos que dependen de x y t, respectivamente, observamos que debe existir un $\lambda \in \mathbb{C}$ y una función u que solucionen el problema espectral de Sturm-Liouville fraccionario (1.5)

$$\begin{cases} -\,{}_0D_x^\alpha u + q(x)u = \lambda u \quad \text{en } D, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Además, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria asociada a $v(t)$, dada por

$$\begin{cases} v'(t) = -\lambda v(t) \quad \text{para } t > 0, \\ v(0) = a, \quad \text{para algún} \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supongamos que el valor inicial g pertenece al espacio generado por los vectores propios del problema (1.5). Veremos que, bajo esta suposición, se obtiene la solución de (1.4) en términos de las posibles soluciones del problema (1.5). Más aún, analizaremos la estabilidad de esta solución y su conexión con los Teoremas 1.1 y 1.2.

Vamos a examinar la relación entre el problema (1.1) y el problema de Sturm-Liouville (1.5). Según el Teorema 1.1, la solución de la formulación variacional (1.2) existe y es única en $U := \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ para cualquier $f \in L^2(D)$. Este teorema implica la existencia del operador $T : L^2(D) \to U$ tal que Tf es solución de (1.2). Es evidente que $T : L^2(D) \to U$ es continuo, ya que al ser Tf la solución variacional entonces de la estimación del Teorema 1.1 se sigue que existe cierta constante $C > 0$ para la cual $||Tf||_U \leq C||f||_{L^2(D)}$. En virtud del Teorema 2.6, se tiene que el encaje $H^{\alpha/2}(D) \hookrightarrow L^2(D)$ es compacto y teniendo en cuenta las observaciones realizadas en la Definición 2.4, tenemos que $U \hookrightarrow H^{\alpha/2}(D)$, de lo cual se sigue que $U \hookrightarrow L^2(D)$ es un encaje compacto. Por tanto el operador $T : L^2(D) \to L^2(D)$ es compacto.

Es bien conocido que los valores propios de los operadores compactos son, a lo sumo, contables, 0 es un punto de acumulación y están acotados [24], Cap. 8. Vamos a denotar por $\mu_1, \mu_2, \dots$ a los valores propios del operador T, cuyos respectivos vectores propios normalizados se denotan por $\omega_1, \omega_2, \dots \in U$. Observe que T es inyectivo. En efecto, si $Tg = 0$, entonces $(g, v) = a(Tg, v) = 0$ para cada $v \in U$. Como $C_c^\infty(D) \subset U$, entonces U es denso en $L^2(D)$, por lo que se tiene que $U^\perp = \{0\}$, de donde se deduce que $g = 0$. De esta forma, 0 no es un valor propio de T.

Usando argumentos similares a los planteados en la Sección 3.2, se obtiene la formulación variacional del problema de Sturm-Liouville (1.5), la cual consiste en encontrar un $u \in U$ y un $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \text{ para cada } v \in U. \tag{1.6}$$

Si la pareja $(\lambda, u) \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \times U$ soluciona el problema variacional (1.6), entonces dado un $v \in U$, tenemos que $a(\lambda^{-1}u, v) = (u, v) = a(Tu, v)$. Luego, $a(\lambda^{-1}u - Tu, v) = 0 = a(0, v)$, y por el Teorema 1.1, se sigue que $Tu = \lambda^{-1}u$. Teniendo en cuenta la inyectividad de T, se deduce que (λ, u) soluciona (1.6) si y solo si (λ^{-1}, u) es un par propio de T, o bien $\lambda = 0, u = 0$. Por tanto, cada par $(\lambda_i := \mu_i^{-1}, \omega_i)$ es solución del problema (1.6). Del Corolario 3.2 tenemos que $a(\cdot, \cdot)$ es coercitivo, por tanto se tiene que existe cierta constante $c := c(\alpha) > 0$ que verifica

$$c||\omega_i||_U^2 \leq a(\omega_i, \omega_i) = \lambda_i(\omega_i, \omega_i) \leq \lambda_i||\omega_i||_U^2,$$

en consecuencia, tenemos que $0 < c \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, reordenando de ser necesario.

Ahora procederemos a resolver nuestro problema (1.4). Como $g \in \text{gen}(\omega_1, \omega_2, \dots)$, entonces $g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_{i_k}(x)$, para algunos $a_k \in \mathbb{R}$, por lo que la solución de (1.4) estará dada por $z(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_{i_k} t} \omega_{i_k}(x)$, de lo cual se sigue que

$$|z(x,t)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k \omega_{i_k}(x)| \right) e^{-\lambda_1 t}.$$

En conclusión, hemos obtenido una solución estable para el problema (1.4), ya que su comportamiento asintótico con el tiempo será nulo siempre que los datos iniciales pertenezcan al espacio generado por los vectores propios de T. Cabe destacar que en el análisis anterior es esencial el estudio de la existencia, unicidad y regularidad de la solución variacional para el problema (1.1), lo cual motiva este trabajo.

Capítulo 2

Algunos conceptos previos de cálculo fraccionario

En este capítulo se definen la integral y derivada de órdenes fraccionarios, estos operadores son fundamentales para el estudio de la ecuación (1.1). Además, se establecen los espacios en los cuales estos operadores actúan y se presentan resultados clave para la Sección 3.1. Para una explicación más detallada sobre estos operadores y sus propiedades, se recomienda consultar los libros [23, 31]. Por otro lado, un análisis más profundo de los espacios presentados y sus respectivos resultados puede encontrarse en [20, 19].

2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Comenzamos esta sección definiendo la integral fraccionaria de Riemann-Liouville para una función f integrable en $D := (a, b)$. La motivación de la integral fraccionaria izquierda proviene de la fórmula de Cauchy para la n-ésima antiderivada, con n natural, dada por

$$ {}_aI_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt. \tag{2.1}$$

Esta identidad se verifica fácilmente por inducción. En efecto, si $n = 1$, esta igualdad es simplemente el teorema fundamental del cálculo. Si suponemos que se cumple para $n > 1$ entero, entonces, realizando un cambio en el orden de integración, se obtiene que

$$\begin{aligned} {}_aI_x^{n+1} f(x) &= \int_a^x {}_aI_x^n f(s) ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_a^s (s-t)^{n-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) \int_t^x (s-t)^{n-1} ds dt = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-s)^n f(s) ds, \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado (2.1).

Una fórmula que involucre cualquier orden real $\gamma > 0$ se obtiene a partir de la identidad $\Gamma(n) = (n-1)!$, de esta manera se define la integral de Riemann-Liouville izquierda de orden γ. Para la integral derecha, el razonamiento es completamente análogo.

Definición 2.1. (Integral fraccionaria de Riemann-Liouville) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(D)$ y $\gamma > 0$. Se define la integral $\gamma-$ésima fraccionaria de Riemann-Liouville izquierda sobre f como

$$ {}_aI_x^\gamma f(x) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\gamma}} dt, \text{ donde } x > a. \tag{2.2}$$

Análogamente, definimos la integral $\gamma-$ésima fraccionaria de Riemann-Liouville derecha sobre f como

$$ {}_xI_b^\gamma f(x) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\gamma}} dt, \text{ donde } x < b. \tag{2.3}$$

Si $\gamma = 0$, definimos ${}_aI_x^0 f(x) = {}_xI_b^0 f(x) = I$, donde I es la identidad.

Observar que, por la desigualdad de Young, estas integrales convergen. Por otro lado, (2.2) y (2.3) coinciden con la fórmula de Cauchy para la n-ésima antiderivada cuando $\alpha = n$, para algún entero positivo n. Además, se puede demostrar que al tomar $\gamma \to 0$ en las expresiones ${}_aI_x^\gamma f(x)$ y ${}_xI_b^\gamma f(x)$, se obtiene $f(x)$.

Para las integrales de órdenes enteros positivos k y j, se cumple la propiedad de semigrupo, es decir, ${}_aI_x^k\, {}_aI_x^j f = {}_aI_x^{k+j} f$ y ${}_xI_b^k\, {}_xI_b^j f = {}_xI_b^{k+j} f$. El siguiente resultado nos permite extender esta propiedad a cualquier número real positivo.

Lema 2.1 (Propiedad de semigrupo para las integrales de Riemann-Liouville)**.** *Para $f \in L^1(D)$, $\alpha, \beta \geq 0$, se cumple que*

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\beta f = {}_aI_x^\beta\, {}_aI_x^\alpha f = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f \qquad y \qquad {}_xI_b^\alpha\, {}_xI_b^\beta f = {}_xI_b^\beta\, {}_xI_b^\alpha f = {}_xI_b^{\alpha+\beta} f.$$

Demostración. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ la demostración sería trivial ya que el operador ${}_aI_x^0$ es la identidad. Vamos a considerar el caso en que $\alpha, \beta > 0$. Sea $x \in D$ realizando un cambio en la región de integración se tiene que

$$\begin{aligned} ({}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s f(t)(x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left(\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} ds \right) dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Recordemos que la función Beta está definida como $B(z_1, z_2) = \displaystyle\int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1} dt$

donde $z_1, z_2 > 0$. Realizando un cambio de variables se tiene que

$$\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds = (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds = B(\alpha,\beta)(x-t)^{\alpha+\beta-1},$$

reemplazando lo anterior en (2.4) y usando la identidad $B(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$ se consigue que

$$({}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\beta f)(x) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt = ({}_aI_x^{\alpha+\beta}f)(x).$$

La identidad restante es análoga a la presente. □

El siguiente resultado nos dice que los operadores ${}_aI_x^\alpha$ y ${}_xI_b^\alpha$ son adjuntos en $L^2(D)$.

Lema 2.2. *Sean $\alpha \in (0,1)$ y $u, v \in L^2(D)$ entonces*

$$({}_aI_x^\alpha u, v) = (u, {}_xI_b^\alpha v),$$

de lo cual se sigue que

$$({}_aI_x^\alpha u, v) = ({}_aI_x^{\alpha/2}u, {}_xI_b^{\alpha/2}v).$$

Demostración. Del cambio de variables que consiste en la reflexión con respecto a la recta y = x se tiene que

$$\begin{aligned}({}_aI_x^\alpha u, v) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x u(t)(x-t)^{\alpha-1}\overline{v(x)}dtdx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_x^b u(x)(t-x)^{\alpha-1}\overline{v(t)}dtdx = (u, {}_xI_b^\alpha v).\end{aligned}$$

□

2.2. Derivadas fraccionarias en $C_c^\infty(D)$

En esta sección definimos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo. Además se muestran las relaciones que posee la derivada de Riemann-Liouville con respecto a la integral de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo y la transformada de Fourier. Empezamos esta sección con la definición de la derivada de Riemann-Liouville.

Definición 2.2. (Derivada fraccionaria de Riemann Liouville) Se define la derivada de Riemann-Liouville izquierda de orden $\beta > 0$ para $f \in C_c^\infty(D)$ como

$$ {}_aD_x^\beta f(x) := \frac{d^n}{dx^n}\left({}_aI_x^{n-\beta} f\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta-n+1}}dt, \ x \in D, \tag{2.5} $$

donde $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\beta \in (n-1, n)$. De forma análoga se tiene la derivada de Riemann-Liouville derecha de orden β

$$ {}_xD_b^\beta f(x) := (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left({}_xI_b^{n-\beta} f\right) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\beta-n+1}}dt, \ x \in D. $$

Si $\beta = n$ entonces ambas derivadas se definen como las derivadas clásicas. Además definimos ${}_aD_x^0 = {}_xD_b^0 = I$.

En el siguiente resultado se consigue una versión fraccionaria para el teorema fundamental del cálculo.

Teorema 2.3 (Teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $\alpha > 0$, tal que $n-1 < \alpha \leq n$ para algún entero $n > 0$. Dado $f \in C_c^\infty(D)$, tenemos que*

$$ {}_aD_x^\alpha({}_aI_x^\alpha f) \equiv f. $$

Demostración. Como f es una función suave que se anula en la frontera entonces, por el teorema de Taylor, se consigue que la función ${}_aI_x^\alpha f$ está acotada. En consecuencia ${}_aI_x^\alpha f \in L^2(D)$. De la propiedad de semigrupos conseguimos

$$ {}_aI_x^{n-\alpha}\, {}_aI_x^\alpha f = {}_aI_x^n f. $$

Como f es suave entonces derivando $n-$veces clásicamente a ambos lados en la identidad previa se consigue el resultado deseado. □

Es importante mencionar que el Teorema 2.3 se cumple en espacios más generales que $C_c^\infty(D)$, lo cual es consecuencia directa de los teoremas de extensión continua para la derivada fraccionaria, ver Teorema 2.7 y Lema 2.8.

Aunque este trabajo se centra en el estudio de un modelo que involucra la derivada de Riemann-Liouville, otro tipo de derivada que es ampliamente usada en las aplicaciones es la derivada fraccionaria izquierda de Caputo la cual se define como

$$ {}_a^CD_x^\beta u := {}_aI_x^{n-\beta}\left(\frac{d^n}{dx^n}u\right), $$

donde β es algún número real positivo no entero y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n-1 < \beta \leq n$. La definición de la derivada derecha de caputo es totalmente análoga, para más detalle de este operador puede consultarse [22], pág. 95.

La mención de la derivada fraccionaria de Caputo es motivada por la siguiente importante identidad que relaciona los dos tipos de derivadas fraccionarias que se han enunciado

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\beta}u = {}_{a}D_{x}^{\beta}u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\beta+1)}(x-a)^{k-\beta}, \tag{2.6} $$

para cualquier $u \in C_c^{\infty}(D)$. Esta identidad y su caso cuando las derivadas fraccionarias son derechas pueden ser encontradas en [22], pág. 91.

Si $D = \mathbb{R}$ las definiciones de estos operadores son análogas y denotamos ${}_{-\infty}D_{x}^{\beta}u$ y ${}_{x}D_{\infty}^{\beta}u$, similarmente para las derivada de Caputo.

Existe una relación importante entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la transformada de Fourier, como se establece en el siguiente lema.

Lema 2.4. *Para $\alpha > 0$ y $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ se tiene*

$$ \mathcal{F}({}_{-\infty}D_{x}^{\alpha}f)(\omega) = (i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}(f)(\omega) \qquad y \qquad \mathcal{F}({}_{x}D_{\infty}^{\beta}f)(\omega) = (-i\omega)^{\beta}\mathcal{F}(f)(\omega). $$

Demostración. La demostración de este lema se encuentra en [20], Teorema 2.8, pág. 36. □

Observe que el Lema 2.4 nos permite redefinir las derivadas fraccionarias izquierdas y derechas de Riemann-Liouville en términos de la transformada de Fourier y su inversa. Este resultado será fundamental para la extensión de estos operadores a espacios más generales, como veremos en la siguiente sección.

2.3. Espacios de Sobolev fraccionarios y extensiones continuas

En este trabajo se utiliza los espacios de Sobolev $W^{\beta,p}(\mathbb{R})$ definidos en una dimensión con $p = 2$, en este caso, son espacios de Hilbert y se denotan por $H^{\beta}(\mathbb{R})$, donde $0 \leq \beta < \infty$ [19]. El espacio de Sobolev clásico $H^{\beta}(\mathbb{R})$, cuando $\beta \in \mathbb{N}$, corresponde a las funciones cuyas derivadas débiles hasta el orden β pertenecen al espacio $L^2(\mathbb{R})$, ver [14]. En algunos problemas de ecuaciones diferenciales, la solución carece de suficiente regularidad como para pertenecer a los espacios de Sobolev de órdenes enteros, lo cual motiva la búsqueda de espacios que los interpolen, así surgen los espacios de Sobolev de orden fraccionario.

Definición 2.3. (Espacio de Sobolev fraccionario $H^{\beta}(\mathbb{R})$) Sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ tal que $\beta > 0$, entonces $\beta = m + \sigma$ para algún entero no negativo m y cierto real $\sigma \in (0, 1)$. Definimos la seminorma

$$[u]_{H^\beta(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde D^m denota la derivada débil. Se denota por $H^\beta(\mathbb{R})$ al espacio que consiste de todas las funciones $u \in H^m(\mathbb{R})$ para las cuales $|u|_{H^\beta(\mathbb{R})} < \infty$. Por convención se define $H^0(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R})$.

Se puede demostrar que, para cualquier $\beta = m + \sigma \geq 0$, el espacio $H^\beta(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{H^\beta(\mathbb{R})} := \left(||u||^2_{H^m(\mathbb{R})} + [u]^2_{H^\beta(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde

$$||u||_{H^m(\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=0}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} |D^k u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Más aún, dicho espacio será un espacio de Hilbert, cuyo producto interno está definido como

$$(u,v)_{H^\beta(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(D^m u(x) - D^m u(y))(D^m v(x) - D^m v(y))}{|x-y|^{1+2\sigma}} dxdy + \sum_{k=0}^{m} (D^k u, D^k v).$$

El espacio $H^\beta(\mathbb{R})$ se puede caracterizar en términos de la transformada de Fourier, como se muestra en el siguiente lema

Lema 2.5. *Dado $0 \leq \beta = m + \sigma < \infty$ entonces la seminorma $[\cdot]_{H^\beta(\mathbb{R})}$ es equivalente a la seminorma*

$$|u|_{H^\beta(\mathbb{R})} := |||\omega|^\beta \hat{u}(\omega)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En consecuencia, el espacio $H^\beta(\mathbb{R})$ se puede caracterizar como todas las funciones $u \in H^m(\mathbb{R})$ tales que $|u|_{H^\beta(\mathbb{R})} < \infty$.

Demostración. Este resultado es una consecuencia del teorema de Plancharel, para más detalles se recomienda seguir las ideas de la Proposición 3.4 de [12]. Este resultado también puede ser encontrado en [19], pág. 16. □

Es importante mencionar que la anterior caracterización sólo se tiene cuando el dominio es toda la recta real. Cuando el dominio es cierto intervalo $D := (a, b)$ (acotado o no acotado) se define el espacio $H^{\beta}(D)$ cambiando D por $\mathbb{R}$ en la Definición 2.3.

El siguiente teorema es un caso particular unidimensional con $p = 2$ de un resultado más general, el cual ha sido demostrado para espacios de Sobolev arbitrarios definidos en dominios acotados de $\mathbb{R}^n$ con frontera de tipo Lipschitz.

Teorema 2.6. *Sean $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2$ y D un intervalo abierto y acotado, entonces*

$$H^{\gamma_2}(D) \hookrightarrow H^{\gamma_1}(D)$$

es un encaje compacto.

Demostración. Ver el Teorema 1.4.3.2, pág. 26 de [19] y las referencias citadas. $\square$

El anterior teorema nos permite interpolar los espacios de Sobolev clásicos definidos en intervalos acotados D con espacios de Sobolev con ordenes fraccionarios.

Hay otro espacio de tipo Sobolev que es ampliamente usado en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias, el cual se define como

Definición 2.4. Sea $\beta \geq 0$, definimos

$$\widetilde{H}^{\beta}(D) := \{u \in H^{\beta}(D) : \quad \tilde{u} \in H^{\beta}(\mathbb{R})\},$$

donde $\tilde{u}$ denota la extensión de u por cero en $\mathbb{R} \setminus D$.

Este espacio es de Banach con la norma $||u||_{\widetilde{H}^{\beta}(D)} := ||\tilde{u}||_{H^{\beta}(\mathbb{R})}$. Más aún, es un espacio de Hilbert. Un hecho útil es que $\widetilde{H}^{\beta}(D) = \overline{C_c^{\infty}(D)}^{||\cdot||_{\widetilde{H}^{\beta}(D)}}$, (ver pág. 24 de [19]). Además se tiene que si $\beta - 1/2$ no es un entero, entonces $\widetilde{H}^{\beta}(D) = \overline{C_c^{\infty}(D)}^{||\cdot||_{H^{\beta}(D)}}$, (ver pág. 31 de [19]). Los espacios $\widetilde{H}^{\beta}(D)$ y $H^{\beta}(D)$ coinciden cuando β es entero, (ver pág. 18 de [19]), pero en general tenemos que $\widetilde{H}^{\beta}(D) \hookrightarrow H^{\beta}(D)$, este hecho será crucial en diversos resultados relacionados a la formulación variacional del problema (1.1).

Un resultado interesante que revela la importancia técnica del espacio $\widetilde{H}^{\beta}(D)$ es que en dicho espacio se puede extender la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, este teorema de extensión es posible por la relación entre la derivada fraccionaria y el espacio $H^{\beta}(\mathbb{R})$ con la transformada de Fourier, ver Lema 2.4 y Lema 2.5. Se dará las ideas principales de la demostración, sin embargo una prueba más detallada de este resultado puede ser encontrada en el Teorema 2.1 de [21].

Teorema 2.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \in (n-1, n)$, los operadores ${}_0D_x^{\beta}u$ y ${}_xD_1^{\beta}u$ definidos para $u \in C_c^{\infty}(D)$ se extienden continuamente a operadores de $\widetilde{H}^{\beta}(D)$ a $L^2(D)$, escritos por simplicidad como ${}_0D_x^{\beta}u$ y ${}_xD_1^{\beta}u$.*

Demostración. De los Lemas 2.4, 2.5 y el teorema de Plancharel se obtiene que para cualquier función $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$||\,_{-\infty}D_x^\beta v||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\mathcal{F}(\,_{-\infty}D_x^\beta v)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||v||_{H^\beta(\mathbb{R})}.$$

Por tanto el operador $_{-\infty}D_x^\beta$ se extiende de forma continua de $H^\beta(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.

Para cada $u \in C_c^\infty(D)$ se tiene que

$$_0D_x^\beta u = \,_{-\infty}D_x^\beta \widetilde{u}|_D.$$

De lo cual el resultado deseado es inmediato, por la anterior desigualdad. □

En virtud del Teorema 2.7, se amplía la definición de las derivadas de Riemann-Liouville de la siguiente forma,

Definición 2.5. (Derivada de Riemann-Liouville en $\widetilde{H}^\beta(D)$) Suponga que $\beta > 0$ y $f \in \widetilde{H}^\beta(D)$. Sea $x \in D$, definimos la derivada izquierda de Riemann-Liouville $\beta-$ésima como

$$_aD_x^\beta f(x) = \mathcal{F}^{-1}((i\omega)^\beta \mathcal{F}(\tilde{f})(\omega))(x).$$

Análogamente se define la derivada derecha de Riemann-Liouville $\beta-$ésima como

$$_xD_b^\beta f(x) = \mathcal{F}^{-1}((-i\omega)^\beta \mathcal{F}(\tilde{f})(\omega))(x).$$

Los siguientes espacios serán útiles para la deducción de la forma variacional para el problema (1.1), a modo de observación denotaremos $D := (a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 2.6 (Espacios $\widetilde{H}_L^\beta(D)$ y $\widetilde{H}_R^\beta(D)$)**.** Denotamos por $\widetilde{H}_L^\beta(D)$ (respectivamente $\widetilde{H}_R^\beta(D)$) como el conjunto de las funciones u cuya extensión por cero $\tilde{u}$ está en $H^\beta(-\infty, b)$ (respectivamente en $H^\beta(a, \infty)$).

Definición 2.7 (Espacios $\widetilde{C}_L^\beta(D)$ y $\widetilde{C}_R^\beta(D)$))**.** Se define el espacio $\widetilde{C}_L^\beta(D)$ (respectivamente $\widetilde{C}_R^\beta(D)$) como las funciones $v \in C^\infty(\overline{D})$ para las cuales $v(a) = v'(a) = ... = v^{(k)}(a) = 0$ (respectivamente $v(b) = v'(b) = ... = v^{(k)}(b) = 0$) donde $k < \beta - 1/2$ es un entero positivo.

Una observación rápida nos permite notar que los espacios $\widetilde{C}_L^\beta(D)$ y $\widetilde{C}_L^\beta(D)$ son densos en los espacios $\widetilde{H}_L^\beta(D)$ y $\widetilde{H}_R^\beta(D)$, respectivamente. De esta observación se sigue el siguiente resultado, el cual relaja las condiciones del Teorema 2.7.

Lema 2.8. *Considere $\beta \in (n-1, n)$. Entonces el operador $_aD_x^\beta u$ definido para $u \in \widetilde{C}_L^\beta(D)$ se puede extender de forma continua a un operador de $\widetilde{H}_L^\beta(D)$ a $L^2(D)$. De forma similar el operador $_xD_b^\beta$ definido para $u \in \widetilde{C}_R^\beta(D)$ se extiende continuamente a un operador de $\widetilde{H}_R^\beta(D)$ a $L^2(D)$.*

Demostración. Ver el Teorema 2.2 de [21]. □

La siguiente propiedad de suavidad en las integrales fraccionarias juega un papel central en la construcción de la solución explícita del problema (1.1) cuando $q \equiv 0$,

Lema 2.9. *Para cada $s, \beta \geq 0$, los operadores ${}_aI_x^\beta$, ${}_xI_b^\beta$ son operadores acotados de $\widetilde{H}^s(D)$ hacia $\widetilde{H}_L^{s+\beta}(D)$ y $\widetilde{H}_R^{s+\beta}(D)$, respectivamente.*

Demostración. Ver el Teorema 3.1 de [21]. □

Un resultado particular del anterior lema establece que el operador ${}_aI_x^\beta : L^2(D) \to \widetilde{H}_L^\beta(D)$ es continuo para cada $x \in D$. Este caso particular será ampliamente usado en la Sección 3.1.

Como consecuencia directa de este lema se tiene el siguiente corolario,

Corolario 2.10. *Sean γ una constante no negativa y $D = (0,1)$, entonces las funciones x^γ y $(1-x)^\gamma$ pertenecen a los espacios $\widetilde{H}_L^\beta(D)$ y $\widetilde{H}_R^\beta(D)$ respectivamente, para cualquier $0 \leq \beta < \gamma + 1/2$.*

Demostración. Observe que se cumplen las identidades $x^\gamma = c_\gamma\, {}_0I_x^\gamma(1)$ y $(1-x)^\gamma = c_\gamma\, {}_xI_1^\gamma(1)$ para cierta constante c_γ. Por otro lado para cada $\delta \in [0, 1/2)$ se tiene que $1 \in \widetilde{H}^\delta(D)$, usando el Lema 2.9 se consigue el resultado deseado. □

Finalmente daremos la idea de la prueba del siguiente lema el cual es fundamental para la deducción de las formas variacionales del problema (1.1)

Lema 2.11. *Si $u \in \widetilde{H}_L^1(D)$ y $\beta \in (0,1)$, entonces*

$$ {}_aD_x^\beta u = {}_aI_x^{1-\beta}(u'). $$

Similarmente para $u \in \widetilde{H}_R^1(D)$ se verifica que

$$ {}_xD_b^\beta u = -\, {}_xI_b^{1-\beta}(u'). $$

Demostración. Sea $u \in \widetilde{C}_L^\beta(D)$, de la identidad (2.6) se tiene que

$$ {}_aD_x^\beta u = {}_a^CD_x^\beta u = {}_aI_x^{1-\beta}(u'). $$

De esta cadena de identidades y de los Lemas 2.8 y 2.9 se sigue nuestro resultado usando un argumento de densidad. Para más detalles ver Lema 5.2, pág. 150 en [20]. □

Los resultados previos nos conducirán a nuestros objetivos: encontrar una formulación variacional del problema (1.1); probar la existencia y unicidad de soluciones fuertes en (1.1) cuando $q \equiv 0$ y probar la existencia, unicidad y resultados de regularidad cuando $q > 0$. Todos estos objetivos serán abordados en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Formulación variacional

En este capítulo se deriva la formulación variacional para el problema (1.1), consiguiendo la forma bilineal asociada $a(u,v) = -({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}v) + (qu, v)$. Además se demuestra la existencia y unicidad de una solución para este problema subyacente y se prueba que dicha solución variacional es una solución fuerte bajo ciertas hipótesis.

3.1. Derivación de la formulación variacional con potencial nulo

Considere, en primera instancia, el problema (1.1) cuando el potencial $q \equiv 0$, vamos a demostrar que este problema tiene una expresión explícita para su solución cuando $f \in L^2(D)$. Por el Lema 2.9 se tiene que $g = {}_0I_x^\alpha f \in \widetilde{H}_L^\alpha(D)$. Además teniendo en cuenta el Lema 2.8 se sigue que ${}_0D_x^\alpha g$ está bien definida. De la propiedad de semigrupos estudiada en el Lema 2.1 se concluye

$$ {}_0I_x^{2-\alpha} g = {}_0I_x^{2-\alpha}\, {}_0I_x^\alpha f = {}_0I_x^2 f \in \widetilde{H}_L^2(D). $$

Para $f \in L^2(D)$ se puede tomar una sucesión $f_n \in C_c^\infty(D)$ tal que $f_n \to f$ con la norma de $L^2(D)$. Realizando un cambio de variable se tiene que

$$ {}_0I_x^\alpha f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f_n(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f_n(x-t) t^{\alpha-1} dt, $$

de la regla integral de Leibnitz se sigue que ${}_0I_x^\alpha f_n(x) \in C^\infty(\overline{D})$, más aún

$$ \frac{d}{dx}({}_0I_x^\alpha f_n(x))\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(f_n(0)x^{\alpha-1} + \int_0^x f_n'(x-t)t^{\alpha-1} dt \right)\bigg|_{x=0} = 0, $$

por tanto $g_n(x) := {}_0I_x^\alpha f_n(x) \in \widetilde{C}_L^\alpha(D)$. Por el Lema 2.9 se tiene que ${}_0I_x^\alpha : L^2(D) \to \widetilde{H}_L^\alpha(D)$ es un operador acotado, entonces $||g_n - g||_{\widetilde{H}_L^\alpha(D)} = ||\,{}_0I_x^\alpha(f_n - f)||_{\widetilde{H}_L^\alpha(D)} \leq C||f_n - f||_{L^2(D)}$ para algún $C > 0$, de lo cual se sigue que $g_n \to g$ en $\widetilde{H}_L^\alpha(D)$. Notemos lo siguiente

$$ {}_0D_x^\alpha g_n = \frac{d^2}{dx^2}({}_0I_x^{2-\alpha}\,{}_0I_x^\alpha f_n(x)) = \frac{d^2}{dx^2}({}_0I_x^2 f_n) = f_n, $$

teniendo en cuenta que el operador ${}_0D_x^\alpha : \widetilde{C}_L^\alpha(D) \to L^2(D)$ se extiende de forma continua a un operador de $\widetilde{H}_L^\alpha(D)$ a $L^2(D)$ (ver Lema 2.8), si tomamos $n \to \infty$ se tiene que ${}_0D_x^\alpha g = f = {}_0D_x^\alpha u$, y por tanto hemos encontrado que

$$ u(x) = -\,{}_0I_x^\alpha f + ({}_0I_x^\alpha f)(1)x^{\alpha-1}, \tag{3.1} $$

es solución del problema (1.1) cuando $q \equiv 0$, lo cual se verifica de forma directa por el Teorema 2.3 y teniendo en cuenta que ${}_0D_x^\alpha x^{\alpha-1} = C\frac{d^2}{dx^2}x = 0$, para alguna constante $C > 0$.

Ahora vamos a conseguir una forma variacional para el problema (1.1) cuando el potencial $q \equiv 0$. Tome $v \in C_c^\infty(D)$ entonces tomando una sucesión $(g_n) \subset \widetilde{C}_L^\alpha(D)$ tal que $g_n \to g$ y realizando integración por partes se tiene que

$$ \begin{aligned} ({}_0D_x^\alpha u, v) &= ({}_0D_x^\alpha(-\,{}_0I_x^\alpha f + ({}_0I_x^\alpha)(1)x^{\alpha-1}), v) = -({}_0D_x^\alpha g, v) = -\lim_{n\to\infty}({}_0D_x^\alpha g_n, v) \\ &= -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d^2}{dx^2}({}_0I_x^{2-\alpha}g_n), v\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}({}_0I_x^{2-\alpha}g_n), v'\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}({}_0D_x^{\alpha-1}g_n, v'). \end{aligned} $$

Como $g_n \in \widetilde{C}_L^\alpha(D)$ entonces su extensión por cero en $(-\infty, 0]$ está en $H^1(-\infty, 1)$ por tanto $g_n \in \widetilde{H}_L^1(D)$. De los Lemas 2.11, 2.2 y el Teorema 2.6 se sigue que

$$ \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}({}_0D_x^{\alpha-1}g_n, v') = \lim_{n\to\infty}({}_0I_x^{2-\alpha}(g_n'), v') = \lim_{n\to\infty}({}_0I_x^{1-\alpha/2}g_n', {}_xI_1^{1-\alpha/2}v') \\ &= \lim_{n\to\infty}({}_0D_x^{\alpha/2}g_n, -\,{}_xD_1^{\alpha/2}v) = -({}_0D_x^{\alpha/2}g, {}_xD_1^{\alpha/2}v). \end{aligned} $$

En consecuencia se tiene que

$$ ({}_0D_x^\alpha u, v) = -({}_0D_x^{\alpha/2}g, {}_xD_1^{\alpha/2}v). $$

Por otro lado, usando 3.1 obtenemos

$$ ({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}v) = -({}_0D_x^{\alpha/2}g, {}_xD_1^{\alpha/2}v) + ({}_0I_x^\alpha f)(1)({}_0D_x^{\alpha/2}x^{\alpha-1}, {}_xD_1^{\alpha/2}v). $$

De un cálculo directo se tiene que ${}_0D_x^{\alpha/2}x^{\alpha-1} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}x^{\alpha/2-1} =: c_\alpha x^{\alpha/2-1}$. Por el Lema

2.2 se consigue que

$$\begin{aligned}({}_0D_x^{\alpha/2}x^{\alpha-1}, {}_xD_1^{\alpha/2}v) &= (c_\alpha x^{\alpha/2-1}, {}_xI_1^{1-\alpha/2}v') = (c_\alpha\, {}_0I_x^{1-\alpha/2}x^{\alpha/2-1}, v') \\ &= c_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1, v') = 0.\end{aligned}$$

De esta forma se concluye que

$$-({}_0D_x^{\alpha}u, v) = -({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}v) =: A(u, v).$$

Por tanto se ha conseguido la formulación variacional del problema (1.1) cuando el potencial $q \equiv 0$. Este problema variacional consiste en encontrar un $u \in U := \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ que satisface

$$A(u, v) = (f, v), \qquad \text{para todo } \; v \in U.$$

Por el Teorema 2.7 se tiene que el operador $A(\cdot,\cdot)$ es un operador continuo en el espacio de Banach U. Con el Lema 3.2 se demuestra la coercitividad del operador $A(\cdot,\cdot)$ y del teorema de Lax-Milgram se sigue de inmediato que nuestro problema variacional tendrá solución única para cada $f \in L^2(D)$. Procedamos entonces a demostar la coercitividad del operador A,

Lema 3.1 (Coercitividad de $A(u, v)$)**.** *Sea $\alpha \in (1, 2)$. Entonces existe una constante positiva $c = c(\alpha)$ que satisface*

$$c||u||^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)} \leq -\left({}_0D_1^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}u\right) = A(u, u) \text{ para cada } u \in \widetilde{H}^{\alpha/2}(D). \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $u \in \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$, usando la extensión continua 2.5 de las derivadas de Riemann-Liouville en $\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{F}$ es un operador lineal unitario se sigue que

$$\begin{aligned}\left({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}u\right) &= \left((i\omega)^{\alpha/2}\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega), (-i\omega)^{\alpha/2}\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^{\alpha/2}\overline{(-i\omega)^{\alpha/2}}|\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Una observación rápida nos permite establecer que

$$\overline{(i\omega)^{\alpha/2}} = \begin{cases} \exp\left(-i\frac{\alpha\pi}{2}\right)\overline{(-i\omega)^{\alpha/2}} & \text{if } \omega \geq 0, \\ \exp\left(i\frac{\alpha\pi}{2}\right)\overline{(-i\omega)^{\alpha/2}} & \text{if } \omega < 0. \end{cases}$$

Como u es una función real valuada entonces, de las propiedades de la transformada de

Fourier, se tiene que $\overline{\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)} = \mathcal{F}(\tilde{u})(-\omega)$ y realizando un cambio de variable se consigue que 3.3 es igual a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}|\omega|^{\alpha}|\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)|^2 d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}|\omega|^{\alpha}|\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)|^2 d\omega \\ = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{\alpha}|\mathcal{F}(\tilde{u})(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}$$

Por tanto hemos probado la identidad

$$\left({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}u\right) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|\tilde{u}|^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})}. \tag{3.4}$$

Por el Teorema 2.6 el encaje $\widetilde{H}^{\alpha/2}(D) \hookrightarrow L^2(D)$ es compacto, si suponemos que no se cumple (3.2) entonces podemos garantizar la existencia de una sucesión $(u_j) \subset \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ la cual es convergente a cierto $v \in L^2(D)$ y satisface que $||u_j||_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)} = 1$ y

$$||u_j||_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)} > -j\left({}_0D_x^{\alpha/2}u_j, {}_xD_1^{\alpha/2}u_j\right). \tag{3.5}$$

Por (3.4) y (3.5) se tiene

$$\lim_{j\to\infty}|\tilde{u}_j|^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = \frac{1}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\lim_{j\to\infty}\left({}_0D_x^{\alpha/2}u_j, {}_xD_1^{\alpha/2}u_j\right) \le \frac{-1}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j} = 0. \tag{3.6}$$

Como consecuencia de la desigualdad triangular en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ se sigue que la seminorma $|\cdot|_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})}$ satisface la desigualdad triangular y por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}||\tilde{u}_j - \tilde{u}_k||^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})} &= ||\tilde{u}_j - \tilde{u}_k||^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\tilde{u}_j - \tilde{u}_k|^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})} \\ &\le ||\tilde{u}_j - \tilde{u}_k||^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\tilde{u}_j|^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})} + |\tilde{u}_k|^2_{H^{\alpha/2}(\mathbb{R})} \to 0\end{aligned}$$

cuando $j, k \to \infty$, en consecuencia la sucesión $(\tilde{u}_j)$ es de Cauchy en $H^{\alpha/2}(\mathbb{R})$, por tanto converge a algún $w \in H^{\alpha/2}(\mathbb{R})$. Ahora note que

$$||w - \tilde{v}||_{L^2(\mathbb{R})} \le ||w - \tilde{u}_j||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\tilde{u}_j - \tilde{v}||_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{cuando} \quad j \to \infty.$$

En consecuencia se tiene que $w = \tilde{v}$ y de esta forma tenemos que $u_j \to v$ en $\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$. Usando la convergencia demostrada se observa que

$$||\tilde{v}||^2_{L^2(\mathbb{R})} + \lim_{j\to\infty}|\tilde{u}_j|^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = \lim_{j\to\infty}||\tilde{u}_j||^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = ||\tilde{v}||^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = ||\tilde{v}||^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\tilde{v}|^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})},$$

teniendo en cuenta (3.6) se sigue que $|\tilde{v}|^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = \lim_{j\to\infty}|\tilde{u}_j|^2_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R})} = 0$ y por tanto $|||\omega|^{\alpha/2}\mathcal{F}(\tilde{v})(\omega)||_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ de lo cual se obtiene $|\omega|^{\alpha/2}\mathcal{F}(\tilde{v})(\omega) \equiv 0$. Del teorema de Plancharel se sigue que $0 = ||\mathcal{F}(\tilde{v})||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\tilde{v}||_{L^2(\mathbb{R})}$ y así $v \equiv 0$ lo cual es un absurdo, ya que habíamos dicho que

$||u_j||_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)} = 1.$ □

3.2. Existencia y unicidad de la solución

En esta sección se usa los razonamientos desarrollados en la Sección 3.1 para conseguir la forma variacional del problema (1.1) en el caso de un potencial $q \in L^\infty(D)$ no necesariamente nulo. Al final de la sección se demuestra que, bajo ciertas condiciones para este potencial, se obtiene la unicidad de la solución en el problema débil como una consecuencia directa de la coercitividad del operador A y el teorema de Lax-Milgram.

Ahora retomemos el caso en el que $q \not\equiv 0$. Vamos a tomar una función $v \in C_c^\infty(D)$, suponga por un momento que $u \in \widetilde{H}^\alpha(D)$. Entonces de la ecuación en el problema (1.1) se tiene que

$$-({}_0D_x^\alpha u, v) + (qu, v) = (f, v).$$

Dado que $C_c^\infty(D)$ es denso en $\widetilde{H}^\alpha(D)$, se puede tomar una sucesión de funciones test con soporte compacto en D denotadas por (u_n) tales que $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$ bajo la norma $||\cdot||_{\widetilde{H}^\alpha(D)}$.

Siguiendo el razonamiento desarrollado en la Sección 3.1 y teniendo en cuenta que $\widetilde{H}^\alpha(D) \subset \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ se consigue que

$$\begin{aligned}
-({}_0D_x^\alpha u, v) &= -\lim_{n\to\infty}({}_0D_x^\alpha u_n, v) = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d^2}{dx^2}({}_0I_x^{2-\alpha}u_n), v\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}({}_0I_x^{2-\alpha}u_n), v'\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left({}_0D_x^{\alpha-1}u_n, v'\right) = \lim_{n\to\infty}\left({}_0I_x^{2-\alpha}(u_n'), v'\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left({}_0I_x^{1-\alpha/2}(u_n'), {}_xI_1^{1-\alpha/2}(v')\right) = -\lim_{n\to\infty}({}_0D_x^{\alpha/2}u_n, {}_xD_1^{\alpha/2}v) \\
&= -({}_0D_x^{\alpha/2}u, {}_xD_1^{\alpha/2}v) = A(u, v).
\end{aligned}$$

Obteniendo la forma débil de la ecuación (1.1), la cual se define como,

Definición 3.1 (Forma variacional de (1.1))**.** Dados $q \in L^\infty(D)$ y $f \in L^2(D)$, encontrar un $u \in U := \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \text{ para todo } v \in U, \tag{3.7}$$

donde $a(u, v) := -A(u, v) + (qu, v)$.

Del Lema 3.2 se consigue el siguiente corolario

Corolario 3.2. *Suponga que $q \in L^\infty(D)$ y $q > 0$. Entonces la forma bilineal $a(u, v)$ definida en $\widetilde{H}^{\alpha/2}(D) \times \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ es coercitiva y continua.*

Demostración. Dado que $q \in L^\infty(D)$ entonces existe un $C > 0$ que verifica

$$|(qu, v)| \leq C||u||_{L^2(D)}||v||_{L^2(D)} \leq C||u||_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)}||v||_{\widetilde{H}^{\alpha/2}(D)}.$$

De la continuidad de $A(\cdot,\cdot)$ en $U \times U$ se sigue que $a(\cdot,\cdot)$ es continua.

Por otro lado, dado que $q > 0$ entonces tenemos que $(qu, u) \geq 0$ y de la coercitividad de $A(\cdot,\cdot)$ se sigue la coercitividad de $a(\cdot,\cdot)$. □

Del Corolario 3.2 y de lo estudiado en la Sección 3.1 se sigue el Teorema 3.3, el cual es una consecuencia directa del teorema de Lax-Milgram.

Teorema 3.3 (Existencia y unicidad de una solución variacional)**.** *Suponga que el potencial $q \in L^\infty(D)$ satisface $q \geq 0$. Entonces para cada $f \in L^2(D)$ se tiene que existe una única solución $u \in U$ que satisface el problema variacional* (3.7)*. Más aún, para algún $C > 0$ independiente de u y f se tiene que*

$$||u||_U \leq C||f||_{L^2(D)}.$$

De la existencia de una solución explícita para el problema (1.1) cuando $q \equiv 0$ se sigue el teorema de aumento de la regularidad para una solución variacional de (1.1) para un q acotado y positivo.

Teorema 3.4 (Aumento de regularidad en la solución)**.** *Con las mismas suposiciones sobre q presentadas en el Teorema 3.3, si $f \in L^2(D)$ entonces la solución u del problema* (3.7) *está en $H^{\alpha-1+\beta}(D) \cap \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$ para cualquier $\beta \in (1-\alpha/2, 1/2)$ y satisface que*

$$||u||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} \leq C||f||_{L^2(D)}.$$

Demostración. Considere $\hat{f} := f - qu$. Por el Teorema 3.3 se tiene que $u \in \widetilde{H}^{\alpha/2}(D)$, además $q \in L^\infty(D)$ por tanto $qu \in L^2(D)$. De la identidad 3.1 y de 3.3 se sigue que

$$\hat{u}(x) = -\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}(x) + ({}_0I_x^\alpha \hat{f})(1)x^{\alpha-1}$$

es la única solución para el problema (3.7) con potencial nulo y fuente $\hat{f}$. Ahora observe que

$$(\hat{f}, v) = (f, v) - (qu, v) = a(u, v) - (qu, v) = A(u, v),$$

de lo cual se sigue que $u = \hat{u}$.

Dado que $\alpha > \alpha - 1 + \beta$ para cada $\beta \in (1-\alpha/2, 1/2)$, entonces del Teorema 2.6 se tiene que el encaje $H^\alpha(D) \hookrightarrow H^{\alpha-1+\beta}(D)$ es compacto, con lo cual conseguimos que

$$\begin{aligned}||\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} &\leq C_1||\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}||_{H^\alpha(D)} = C_1(||\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}||^2_{L^2(D)} + |\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}|^2_{H^\alpha(D)})^{1/2}\\ &\leq C_1\left(||\widetilde{{}_0I_x^\alpha \hat{f}}||^2_{L^2(-\infty,1)} + |\widetilde{{}_0I_x^\alpha \hat{f}}|^2_{H^\alpha(-\infty,1)}\right)^{1/2} = C_1||\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}||_{\widetilde{H}_L^\alpha(D)}.\end{aligned}$$

Para cierta constante $C_1 > 0$. Del Lema 2.9 se tiene que el operador ${}_0I_x^\alpha : L^2(D) \to \widetilde{H}_L^\alpha(D)$ es acotado, teniendo en cuenta la desigualdad dada por el Teorema 3.3 y que $q \in L^\infty(D)$ conseguimos la cota

$$||\,{}_0I_x^\alpha \hat{f}||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} \leq C_2||f||_{L^2(D)},$$

para alguna constante $C_2 > 0$.

Por el Corolario 2.10 se tiene que $x^{\alpha-1} \in H^{\alpha-1+\beta}(D)$ y por tanto se sigue la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}||({}_0I_x^\alpha \hat{f})(1)x^{\alpha-1}||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} &= ||x^{\alpha-1}||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)}|({}_0I_x^\alpha \hat{f})(1)|\\ &\leq C_3\left|\int_0^1 \hat{f}(t)(1-t)^{\alpha-1}dt\right| \leq C_4||f||_{L^2(D)},\end{aligned}$$

para algunas constantes $C_3, C_4 > 0$, de esta forma hemos conseguido

$$||u||_{H^{\alpha-1+\beta}(D)} \leq C_5||f||_{L^2(D)}$$

para alguna constante $C_5 > 0$, como se quería. □

3.3. Conclusiones

En este trabajo se estudió la formulación variacional de un problema con derivadas de Riemann-Liouville, obteniendo resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución variacional sin la Suposición 4.1 de [21], y se discutieron las conexiones entre el problema estacionario (1.1) y el evolutivo (1.4).

Cabe destacar que existe una versión de la desigualdad de Poincaré para la derivada de Riemann-Liouville (Teorema 3.7 de [33]), que permite obtener la coercitividad del operador a cambiando la hipótesis $q \geq 0$ por $q \geq -C$, con $C > 0$ dependiendo de la constante de Poincaré. Esto garantiza la estabilidad del problema evolutivo (1.4) incluso cuando q es negativo.

Finalmente, el Teorema 3.4 muestra un aumento de regularidad en la solución variacional, aunque menor que en modelos clásicos (ver Teorema 8.10 de [18]).

Bibliografía

[1] Niels Henrik Abel. Solution de quelques problems al'aide d'integrales definies, werke 1. *Mag. Naturvidenkaberne*, pages 10–12, 1823.

[2] Ronald L. Bagley and Peter J. Torvik. Fractional calculus a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5):741–748, 1983.

[3] David A Benson, Stephen W Wheatcraft, and Mark M Meerschaert. The fractional-order governing equation of lévy motion. *Water resources research*, 36(6):1413–1423, 2000.

[4] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. *Annals of Geophysics*, 19(4):383–393, 1966.

[5] BA Carreras, VE Lynch, and GM Zaslavsky. Anomalous diffusion and exit time distribution of particle tracers in plasma turbulence model. *Physics of Plasmas*, 8(12):5096–5103, 2001.

[6] A Cayley. Note on riemann's paper "versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation" werke pp. 331–344. *Mathematische Annalen*, 16:81–82, 1880.

[7] AS Chaves. A fractional diffusion equation to describe levy flights. *Physics letters A*, 239(1-2):13–16, 1998.

[8] D del Castillo-Negrete and BA Carreras. Stratified shear flows in a model of turbulence-shear flow interaction. *Physics of Plasmas*, 9(1):118–127, 2002.

[9] Diego del Castillo-Negrete. Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems. *Physics of Plasmas*, 7(5):1702–1711, 2000.

[10] Diego del Castillo-Negrete, BA Carreras, and VE Lynch. Front dynamics in reaction-diffusion systems with levy flights: A fractional diffusion approach. *Physical Review Letters*, 91(1):018302, 2003.

[11] Diego del Castillo-Negrete, Benjamin A Carreras, and Vickie E Lynch. Nondiffusive transport in plasma turbulence: a fractional diffusion approach. *Physical review letters*, 94(6):065003, 2005.

[12] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci. Hitchhikers guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des sciences mathématiques*, 136(5):521–573, 2012.

[13] Vincent J Ervin and John Paul Roop. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 22(3):558–576, 2006.

[14] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.

[15] J.B.J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Landmarks of Science. Didot, 1822.

[16] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Volatility is rough. *Quantitative finance*, 18(6):933–949, 2018.

[17] KW Gentle, RV Bravenec, G Cima, H Gasquet, GA Hallock, PE Phillips, DW Ross, WL Rowan, AJ Wootton, TP Crowley, et al. An experimental counter-example to the local transport paradigm. *Physics of Plasmas*, 2(6):2292–2298, 1995.

[18] David Gilbarg, Neil S Trudinger, David Gilbarg, and NS Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer, 1977.

[19] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Monographs and studies in mathematics. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

[20] Bangti Jin et al. *Fractional differential equations*. Springer, 2021.

[21] Bangti Jin, Raytcho Lazarov, Joseph Pasciak, and William Rundell. Variational formulation of problems involving fractional order differential operators. *Mathematics of Computation*, 84(296):2665–2700, 2015.

[22] Anatoli Aleksandrovich Kilbas, Hari M Srivastava, and Juan J Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, 2006.

[23] Anatoly A Kilbas, Oleg I Marichev, and Stefan G Samko. Fractional integrals and derivatives (theory and applications), 1993.

[24] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 17. John Wiley & Sons, 1991.

[25] Sylvestre Francois Lacroix. *Traité du calcul differentiel et du calcul integral*. chez

JBM Duprat, 1797.

[26] H Laurent. Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 3:240–252, 1884.

[27] Gottfried Wilhelm Leibniz. Letter from hanover, germany to g.f.a. l'hospital, september 30, 1695. *Mathematische Schriften*, 2:301–302, 1849.

[28] A. V. Letnikov. An explanation of the main concepts of the theory of differentiation of arbitrary indec. *Moscow Matem. Sbornik*, 6:413–445, 1872.

[29] Joseph Liouville. Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. 1832. 6.

[30] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics reports*, 339(1):1–77, 2000.

[31] Kenneth S Miller and Bertram Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Willey Sons*, 1993.

[32] James D Murray. *Mathematical biology: I. An introduction*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2007.

[33] Luis Fernando López Ríos and Julián Bravo-Castillero. Variational formulation for fractional hyperbolic problems in the theory of viscoelasticity. *arXiv preprint arXiv:2108.08795*, 2021.

[34] TH Solomon, Eric R Weeks, and Harry L Swinney. Observation of anomalous diffusion and lévy flights in a two-dimensional rotating flow. *Physical Review Letters*, 71(24):3975, 1993.

[35] N Ya Sonin. On differentiation with arbitrary index. *Moscow Matem. Sbornik*, 6(1):1–38, 1869.