UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre la existencia, unicidad, regularidad, acotamiento y estabilidad de un sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes de dos especies con cinéticas competitivas

Genner Pineda Ceballos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias
Departamento de matemáticas
Medellín, Colombia
2022

Sobre la existencia, unicidad, regularidad, acotamiento y estabilidad de un sistema de quimiotaxis-navier-stokes de dos especies con cinéticas competitivas

Genner Pineda Ceballos

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
Vladimir Angulo Castillo

Línea de Investigación:
Ecuaciones diferenciales parciales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Medellín, Colombia
2022

Agradecimientos

Le ofrezco un especial agradecimiento en este trabajo a mi padre Rodolfo Javier Pineda y a mi madre Luz Mery Ceballos por ofrecerme un apoyo incondicional a lo largo de mi vida, en todos y cada uno de mis objetivos, a Maria Isabel Gonzales por su apoyo emocional en momentos difíciles, a mis colegas Andrés Angulo García, Alejandro Yepes Botero, Faidher Rodriguez y Efraín Mosquera, por todos aquellos gratos momentos a lo largo de mi pregrado en matemáticas, al profesor Vladimir Angulo Castillo por sus amplios conocimientos, por su motivación en la enseñanza y por su gran calidad humana y agradezco a la Sede Orinoquía de la Universidad Nacional de Colombia por haberme brindado la invaluable oportunidad de trabajar en el proyecto de investigación " Análisis sobre la existencia y unicidad de soluciones globales a algunos modelos matemáticos relacionados con la invasión tumoral ".

Resumen

En este trabajo se demuestra con detalle los resultados conseguidos en [1] relacionados a la existencia, unicidad, regularidad, acotamiento y estabilidad de la solución al siguiente sistema de Quimiotaxis-Navier-Stokes con cinéticas de tipo Lotka Volterra en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ (n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi, \ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_v n_1 = \partial_v n_2 = \partial_v c = 0 \ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ n_1(\cdot, 0)) := n_{1,0}, \ n_2(\cdot, 0)) := n_{2,0}, \ c(\cdot, 0) := c_0, \ u(\cdot, 0) := u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{0-1}$$

Este sistema modela la concentración de las especies n_1, n_2 cuando interactúan con un químico quimioatrayente c, asumiendo un campo vectorial de velocidad u. Además durante este trabajo exploraremos el significado de cada término y variable del modelo de Quimiotáxis previo y desarrollaremos una concisa revisión preliminar de las diversas ramas de las matemáticas usadas bajo el contexto del estudio de nuestro sistema de interés, mostrando la diversa teoría subyacente en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Palabras clave: Quimiotaxis, ecuación de Navier-Stokes, cinética de tipo Lotka Volterra, existencia, unicidad, regularidad, acotamiento, estabilidad.

Abstract

In this paper we demonstrate in detail the results obtained in [1] related to the existence, uniqueness, regularity, boundedness and stability of the solution to the following Chemotaxis-Navier-Stokes system with Lotka Volterra type kinetics:

$$\begin{cases} (n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ (n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi, \ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_v n_1 = \partial_v n_2 = \partial_v c = 0 \ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ n_1(\cdot, 0)) := n_{1,0}, \ n_2(\cdot, 0)) := n_{2,0}, \ c(\cdot, 0) := c_0, \ u(\cdot, 0) := u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{0-2}$$

This system models the concentration of n_1, n_2 species when interacting with a chemoattractant chemical c, assuming a velocity vector field u. In addition during this work we will explore the meaning of each term and variable of the previous Chemotaxis model and develop a concise preliminary review of the various branches of mathematics used under the context of the study of our system of interest, showing the diverse theory underlying the study of Partial Differential Equations.

Keywords: Chemotaxis, Navier-Stokes equation, Lotka Volterra type kinetics, existence, uniqueness, regularity, boundedness, stability.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Durante el siglo XX se dio un avance sin precedentes en el entendimiento de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (desde ahora EDP's), en cierta forma provocado por la madurez alcanzada en el Análisis Funcional por parte de la escuela matemática de Leópolis durante los años 30's y 40's del siglo pasado, en donde destaca en sobremanera el trabajo realizado por Banach, sentando las bases del Análisis Funcional con su tesis doctoral [17] y realizando grandes avances en conjunto con Steinhaus, Ulam, Kuratowski, entre otros.

Las EDP's han demostrado ser un instrumento de gran importancia para el desarrollo de la humanidad, modelando fenómenos de la física, química y biología, además en sí mismas representan un entorno matemático fértil en investigación que contiene grandes retos como la resolubilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Resultan particularmente útiles las EDP's en la comprensión de diversos procesos biológicos e interacciones entre seres vivos, ejemplos de ello yacen en los trabajos de Alfred J. Lotka en 1910 con su modelo de cazador-presa [18] o los diversos sistemas de Quimiotaxis entre los cuales se ha conseguido implementar diversos métodos numéricos gracias a las soluciones clásicas demostradas en dichos modelos [19], entiéndase la Quimiotaxis como el fenómeno por el cual el movimiento de las células es dirigido en respuesta a un gradiente químico extracelular, de esta manera las células logran migrar a entornos más favorables para su subsistencia, dicha particularidad fue inicialmente observada en el siglo XIX por los biólogos T.W. Ergelmann (1843-1909) y W.F. Pjeffer (1845-1920) los cuales descubrieron bacterias migrando a lugares con un gradiente superior de oxígeno, ver [20] para más detalles.

Un sin número de procesos fisiológicos están estrechamente ligados a la Quimiotaxis, tales como el reclutamiento de células inflamatorias en sitios de infección, el desarrollo de algún órgano durante la embriogénesis y la evolución del Cáncer, ya que la migración celular resulta ser un componente esencial en la diseminación de células tumorales desde un tumor primario a sitios distantes a él, para más detalles ver [15], [16].

Además, el fenómeno de la Quimiotaxis resulta particularmente interesante desde el punto de vista matemático, ya que, como veremos a continuación, necesariamente quedan involucradas Ecuaciones Diferenciales que representan retos históricos como lo es la Ecuación de Navier-Stokes, en este trabajo nos centramos en el modelo de Quimiotaxis-Navier-Stokes con cinética competitiva de tipo Lotka Volterra:

$$\begin{cases} (n_1)_t + u\cdot\nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2) & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \\ (n_2)_t + u\cdot\nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2\nabla\cdot(n_2\nabla c) + \mu_2 n_2(1-a_2n_1-n_2) & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \\ c_t + u\cdot\nabla c = \Delta c - (\alpha n_1+\beta n_2)c & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \\ u_t + (u\cdot\nabla)u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi,\ \nabla\cdot u = 0 & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \\ \partial_v n_1 = \partial_v n_2 = \partial_v c = 0\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ n_1(\cdot,0)) := n_{1,0},\ n_2(\cdot,0)) := n_{2,0},\ c(\cdot,0) := c_0,\ u(\cdot,0) := u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{1-1}$$

Donde n_1, n_2 corresponden a la concentración de dos especies de microorganismos, c se refiere a la concentración de un fluido quimiotrayente, u es el campo vectorial de la velocidad del fluído el cual es modelado por una ecuación de tipo Navier-Stokes donde P es la presión y $\nabla\phi$ es la fuerza gravitacional. Debido a la gran importancia biológica que tiene la implementación de la Ecuación de Navier-Stokes en la Quimiotaxis, muchos matemáticos han realizado inumerables aportes a modelos de tipo Navier-Stokes dejando de lado la cinética competitiva de tipo Lotka Volterra de esta manera el artículo [1], el cual estudiamos en este disertación, resulta bastante novedoso, teniendo en cuenta que es una de las pocas investigaciones que abordan este problema tomando dos especies con una interacción de tipo Lotka Volterra, lo cual nos indica una competencia entre estos organismos por cierto fluido quimioatrayente el cual puede asociarse a algún tipo de alimento o sustancia indispensable para la supervivencia de estas especies.

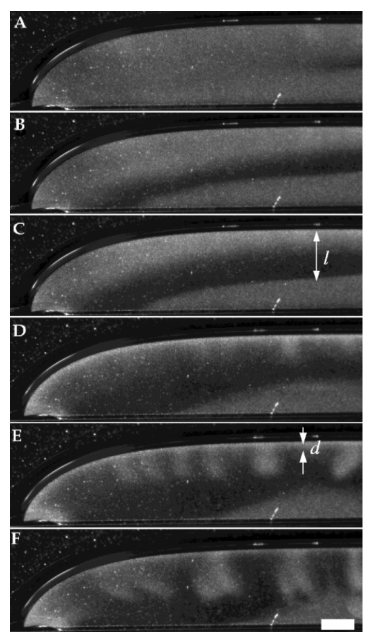

Figura 1-1: *Bacillus subtilis* en una gota de agua.

Una de las motivaciones biológicas del modelo de Quimiotaxis-Navier-Stokes para una especie (y en consecuencia sin competencias cinéticas) se encuentra en [60] en donde se realiza un experimento en el cual la bacteria *Bacillus subtilis* se encuentra suspendida en una gota de agua que se encuentra entre dos portaobjetos con separación de

1 mm y el volumen de bacterias en esta gota de agua ocupa un 1 % del volumen total, ver figura **1-1**[1]. En un principio la distribución de esta bacteria es homogénea como se observa en la figura **1-1** A, sin embargo, se observa que dicha concentración de bacterias evoluciona con el tiempo, algunas de estas bacterias se dirigen hacia arriba de la gota en busca de oxigeno como se observa en la figura **1-1** B, mientras otras se quedan sin oxígeno y quedan inactivas como se observa en la figura **1-1** C. Por otro lado el oxigeno se difunde a través de la gota de agua por medio de la superficie y dado que las bacterias son un 10 % más densas que el agua entonces se crearán perturbaciones en la concentración de bacterias existente en la superficie de la gota como se observa en la figura **1-1** D, posteriormente se forman conglomeraciones densas en bacterias que se mueven lateralmente a través de la superficie curvada de la gota, dicho fenómeno lo podemos observar en la figura **1-1** E. Gracias a este movimiento del oxigeno en la gota de agua las bacterias constantemente se estarán oxigenando, incluyendo aquellas bacterias inactivas las cuales participarían en el patrón expuesto como se muestra en la figura **1-1** F.
Del anterior experimento se propone en [61] el modelo

$$\begin{cases} c_t + u \cdot \nabla c - D_c \Delta c = -n\kappa f(c), \\ n_t + u \cdot \nabla n - D_n \nabla n = -\chi \nabla \cdot [n r(c) \nabla c], \\ \rho(u_t + u \cdot \nabla u) + \nabla p - \eta \Delta u + n \nabla \Phi = 0, \\ \nabla \cdot u. \end{cases} \tag{1-2}$$

Donde n denota la concentración de bacterias, c la concentración del fluido quimioatrayente (en el caso del experimento realizado en [60] dicho fluído será el oxigeno), u denota el campo vectorial de velocidad del fluído el cual se asume incompresible con la suposición $\nabla \cdot u$, observar que dicha incógnita u debe satisfacer a una ecuación de tipo Navier-Stokes donde p es la presión, η es el coeficiente relacionado a la viscocidad del fluído y $\nabla\Phi$ representa la fuerza gravitacional. Note la similitud con (1-1).

Motivados por el modelo previo que describe al fenómeno observado en el experimento realizado en [60], muchos investigadores realizaron grandes esfuerzos en demostrar la existencia de dicho modelo (y de similares, como el que estudiamos en este trabajo), por ejemplo Duan, Lorz y Markowich fueron los primeros en demostrar la existencia global de soluciones débiles a los problemas de Cauchy de (1-2) bajo algunos supuestos de pequeñez en la función relacionada a la gravitación (también llamada función del potencial) y a los datos iniciales, ver [63]. Posteriormente Liu y Lorz en [62] removieron dichas suposiciones y obtuvieron resultados de existencia global de soluciones débiles con grandes datos. Además Winkler en [54] consiguió la existencia de una única solución clásica global con una cantidad arbitraria de datos iniciales en un dominio convexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Por otro lado Lankeit en [51] obtuvo soluciones globales, acotamiento y comportamientos asintóticos a las soluciones de (1-1). Para el caso en el que

[1]Esta imagen se obtuvo de la referencia [60]

están involucradas dos especies se ha estudiado problemas que involucran cinéticas de tipo Lotka Volterra en donde la ecuación de la concentración del fluido quimioatrayente es descrita por $c_t = \Delta c + \alpha n_1 + \beta n_2 - \gamma c$, los casos no competitivos ($a_1 = a_2 = 0$) se estudiaron en [53], [42], [43], por otro lado el caso competitivo ha sido estudiado por Stinner, Tello y Winkler en [44]; Black y Lankeit en[45]; también podemos encontrar un estudio del caso competitivo en [46] y en [47].

El sistema (1-1) ha tenido una serie de nuevas investigaciones desde el año 2017, un primer acercamiento a este modelo en concreto fue realizado por Hirata, Kurima, Mizukami y Yokota en [1]; posteriormente Jin y Xiang estudiaron ciertos ratios de convergencia en la solución al modelo (1-1) en [48]; En el 2018 Cao, Kurima y Mizukami investigaron en [49] el modelo (1-1) en el caso de tres dimensiones, encontrando soluciones Globales y un comportamiento asintótico en las soluciones; Zhang y Li investigaron en [50] el caso de general con dimensión n, obteniendo soluciones globales.

El propósito general de esta disertación es brindar un conciso marco teórico de los resultados establecidos en [1], además demostramos con todo detalle la existencia, unicidad, regularidad, acotamiento y estabilidad de la solución de (1-1) y demostramos de manera detallada la positividad de n_1, n_2, c, todo esto en el contexto de un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ acotado y con ciertos resultados de regularidad iniciales.

Capítulo 2

Preliminares

Para poder abordar el modelo de Quimiotaxis-Navier-Stokes que estudiamos en este documento es necesario tener ciertos elementos matemáticos provistos por la teoría de la medida y el análisis funcional como son los Espacios L^p, Espacios de Sobolev y varios resultados y estimativas a los mismos. De igual manera, realizamos una incursión por la teoría de Semigrupos y el estudio de algunos operadores acotados que son necesarios en nuestro modelo. Además, presentamos algunos resultados de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales a Problemas de tipo parabólico para abordar propiedades de existencia, unicidad, regularidad, positividad y estabilidad al modelo de Quimiotaxis-Navier-Stokes.

2.1. Teoría de la Medida

En esta sección presentamos algunos elementos de la teoría de la medida con el objetivo de definir la integral de Lebesgue para funciones en $\mathbb{R}^n$ con codominio $\mathbb{R}$, esto debido a que en nuestro modelo constantemente vamos a estar usando varios espacios de funciones que facilitan el estudio de las ecuaciones diferenciales y dichos espacios están directamente relacionados con la integral de Lebesgue y demás conceptos de la Teoría de la Medida, se recomienda al lector consultar las referencias [2] y [11] para más detalles.

2.1.1. Espacios de Medida y conjuntos de Borel

Definición 2.1.1. ($\sigma-$álgebra)
Considere X un conjunto no vacío y $\mathscr{M}$ una colección de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra de X si verifica las siguientes condiciones:

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$.

2. Si $E \in \mathscr{M}$, entonces $E^c \in \mathscr{M}$.

3. Dados $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{M}$.

Además, en el caso de que $\mathscr{M}$ sea una σ-álgebra de X, diremos que el par $(X, \mathscr{M})$ es un *Espacio Medible.*

Con la cual podemos introducir la definición de medida:

Definición 2.1.2. (Medida)
Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{M}$ una $\sigma-$álgebra dada, decimos que la función $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una Medida de $(X, \mathscr{M})$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.

2. Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos, entonces $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Definición 2.1.3. (Espacio de Medida)
Definimos el Espacio de Medida como la tripleta $(X, \mathscr{M}, \mu)$, donde X es un conjunto no vacío, $\mathscr{M}$ es una $\sigma-$álgebra de X y $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una medida para $(X, \mathscr{M})$, respectivamente.

Dado un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$, diremos que $A \in \mathscr{M}$ tiene medida cero si y solo si $\mu(A) = 0$. Además, afirmamos que una propiedad se cumple casi en toda parte (c.t.p) de X cuando dicha propiedad se cumple en X excepto en un conjunto de medida cero. Ahora, con la definición de $\sigma-$álgebra dada, también podemos introducir los Conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$, el cual nos permitirá definir funciones que puedan ser integrables (en el sentido de Lebesgue) y, en consecuencia, definir los Espacios L^p.

Definición 2.1.4. ($\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$)
Definimos la $\sigma-$álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathscr{B}_n$, como la menor $\sigma-$álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Los elementos de $\mathscr{B}_n$ son conocidos como *conjuntos de Borel* o *Borelianos.*

2.1.2. Integral de Lebesgue

A continuación introducimos algunos elementos necesarios que nos permitirán definir la integral de Lebesgue (para una función no negativa). Esta es construida a través del supremo de las sumas inferiores de Lebesgue.

Definición 2.1.5. (Partición)
Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Espacio de Medida, diremos que $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \mathscr{M}$ es una Partición de X, si ella es una colección disjunta y verifica $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = X$.

Definición 2.1.6. (Función Medible)
Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Espacio de Medida. Diremos que el mapeo $f : X \to \mathbb{R}$ es una Función $\mathscr{M}-$Medible, si dado un conjunto de Borel B tenemos que $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$.
En caso de ser clara la $\sigma-$álgebra en nuestro contexto, nos referiremos simplemente a una Función Medible.

Definición 2.1.7. (Suma inferior de Lebesgue)
Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Espacio de Medida, $P = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una partición de X y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible, entonces definimos la Suma Inferior de Lebesgue como:

$$\mathscr{L}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \inf_{A_i} f.$$

Definición 2.1.8. (Integral de Lebesgue con codominio no negativo)
Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Espacio de Medida, $f : X \to [0, \infty]$ una función medible, entonces definiremos la Integral de Lebesgue como:

$$\int f d\mu := \sup \{\mathscr{L}(f, P) \ : \ P \text{ es una partición de } X\}.$$

Con la siguiente definición se puede generalizar el concepto de Integral de Lebesgue para funciones con codominio real.

Definición 2.1.9. (f^+, f^-)
Supongamos que $f : X \to [-\infty, \infty]$ es una función medible. Definimos las partes positivas y negativas de f como las funciones medibles f^+, $f^- : X \to [0, \infty]$ dadas por

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0, \end{cases}$$
$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

En tal caso, notemos que

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Definición 2.1.10. (Integral de Lebesgue de una función con valores reales)
Asumamos que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida y $f : X \to [-\infty, \infty]$ es una función $\mathscr{M}-$medible tal que $\displaystyle\int f^+ d\mu$ es finito o $\displaystyle\int f^- d\mu$ es finito. Definimos la integral de Lebesgue de f a través de la igualdad

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \ .$$

Diremos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable, si $\displaystyle\int |f| < \infty$.

2.1.3. Medida de Lebesgue

Vamos a construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para ello, introducimos la medida de Lebesgue para $n = 1$ y luego la vamos a generalizar a $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. Consideremos un intervalo abierto I, la longitud de dicho intervalo es definida como sigue:

Definición 2.1.11. (Longitud de un intervalo)
Definimos la longitud de un intervalo como un mapeo denotado por ℓ de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ a $[0, \infty]$ que verifica $\ell(\varnothing) = 0$, $\ell(a, b) = b - a$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ y para todo intervalo infinito I tendremos que $\ell(I) = \infty$.

La siguiente definición nos permite generalizar el concepto anterior a un conjunto arbitrario:

Definición 2.1.12. (Medida exterior)
Sea $A \subseteq X$, definimos la *Medida Exterior* de A como:

$$\lambda(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}(I_k) : \ I_k \text{ es un intervalo abierto en } \mathbb{R} \text{ tal que: } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

La Medida Exterior en general no es una medida (a pesar de su nombre) ya que puede ocurrir que para cierto par de conjuntos disjuntos $A, B \subseteq X$ se verifique que $\lambda(A \cup B) \neq \lambda(A) + \lambda(B)$ (Teorema 2.18, pag 21 [2]). Sin embargo, en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_1)$ ella es aditiva (Teorema 2.66, pag 50 [2]). Más aún, bajo el contexto de $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_1)$ en efecto es una medida, (Teorema 2.68, pag 51 [2]), particularmente a la medida exterior en los conjuntos de Borel $\mathscr{B}_1$ la definiremos como la *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$. A continuación definimos la medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$.

Definición 2.1.13. (Producto de dos $\sigma-$álgebras)
Supongamos que $(X, \mathcal{S})$ y $(Y, \mathcal{T})$ son dos Espacios de Medida. Definimos la $\sigma-$álgebra producto, denotada por $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, como la menor $\sigma-$álgebra en $X \times Y$ que contiene al conjunto:

$$\{A \times B : \ A \in \mathcal{S}, \ B \in \mathcal{T}\}.$$

La siguiente proposición la cual nos será útil para definir el dominio de nuestra medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.1.14. $B_n \otimes B_m = B_{n+m}$.

Definición 2.1.15. (Medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$)
La medida de Lebesgue para $\mathbb{R}^n$ la denoraremos por λ_n y la definiremos de manera inductiva como

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} \times \lambda_1,$$

donde λ_1 es la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_1)$.

A partir de ahora, a menos que se especifique lo contrario, asumiremos que $\mathbb{R}^n$ está dotado de la Medida de Lebesgue y para cada función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible (en el sentido Lebesgue), la expresión $\int f$ denotará la integral bajo la medida de Lebesgue.

Definición 2.1.16. (Función característica)
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, denotaremos a la función característica de E por $\chi_E(x)$ y tendrá valor igual a 1 si $x \in E$ y 0 si $x \notin E$.

Finalmente, para todo conjunto Lebesgue medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotamos $\displaystyle\int_\Omega f = \int f\chi_\Omega$. A continuación, presentamos un resultado clásico que será vital en la demostración de estimativas útiles para la estabilidad de nuestro modelo.

Teorema 2.1.17. (Teorema de la Convergencia Dominada)
Supongamos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un Espacio de Medida, $f : X \to [-\infty, \infty]$ es $\mathcal{S}-$medible y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{S}-$medibles tales que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

c.t.p en X. Si existe una función $\mathcal{S}-$medible $g : X \to [0, \infty]$ tal que

$$\int g d\mu < \infty \quad \text{y} \quad |f_k(x)| \leq g(x) \text{ c.t.p en } X,$$

para todo entero positivo k, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

2.2. Elementos preliminares del análisis en $\mathbb{R}^n$

A continuación presentamos una colección de definiciones y resultados que utilizaremos constantemente en el planteamiento de nuestro modelo y en el estudio del mismo. Aconsejamos al lector consultar referencias como [6] y [14] para más detalles.

Vamos a denotar por $B_r(c) \subseteq \mathbb{R}^n$ como la bola abierta con centro en c y radio $r > 0$. Denotaremos por $C^k(\Omega)$, donde k es un entero no negativo, al conjunto de funciones definidas en Ω que son continuas y diferenciables hasta la derivada de orden k. Así mismo, introducimos la notación $C^\infty(\Omega)$ la cual, de manera natural, denota al conjunto de todas las funciones definidas en Ω que son infinitamente derivables e infinitamente continuas. Usualmente nos referiremos a dichas funciones como funciones suaves. Además, si sobreentendemos cuál es el dominio de dicha función, entonces simplemente denotaremos a estos conjuntos de funciones como C^k y C^∞, respectivamente.

Durante el estudio de nuestro modelo, constantemente usaremos operadores clásicos, como el operador de Laplace, el operador divergencia y el gradiente, los cuales definimos a continuación. El operador de Laplace, denotado por Δ, opera sobre funciones de clase C^2 de la siguiente forma: si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^2, entonces

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Similarmente, tenemos el operador de divergencia, el cual denotaremos por $\nabla\cdot$. Este operador está definido sobre campos vectoriales $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferenciables y está dado por

$$\nabla \cdot u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u_m}{\partial x_m}.$$

Además, utilizaremos constantemente el operador gradiente, el cual opera sobre funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ derivables de la siguiente forma

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

2.2.1. Fronteras de clase C^k y derivadas exteriores

Definición 2.2.1. (Dominio)
Decimos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un Domino si es abierto y conexo, si adicionalmente Ω es acotado entonces nos referiremos a este como un Dominio Acotado.

Definición 2.2.2. (Fronteras de clase C^k)
Diremos que $\partial\Omega$ es de clase C^k, $k \in \mathbb{N}$, si para cada punto $x^0 \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que sobre reescritura y reorientación de ejes coordenados, de ser necesario, tenemos que

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B(x^0, r) : \ x_n > \gamma(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}.$$

En caso de que $k = \infty$, naturalmente diremos que $\partial\Omega$ tiene frontera suave o que es de clase C^∞.

Así, de manera intuitiva, diremos que una frontera es de clase C^k, si es la gráfica de una función de clase C^k.

Definición 2.2.3. (Campo vectorial unitario normal exterior)

1. Sea Ω de clase C^1, definimos el campo vectorial unitario normal exterior como un $\nu = (\nu^1, ..., \nu^n)$ tal que $\nu(z)$ es unitario y normal a cada punto $z \in \partial\Omega$.

2. Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Diremos que
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot Du$$
es la Derivada Exterior de u.

2.2.2. Teorema de Gauss-Green, Integración por Partes y Fórmulas de Green

A continuación presentamos tres teoremas clásicos que utilizaremos más adelante en este documento. Si el lector busca familiarizarse con los mismos sugerimos consultar el libro [14]. En lo que sigue, consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado y abierto tal que la frontera $\partial\Omega$ es de clase C^1.

Teorema 2.2.4. (Teorema de Gauss-Green)
Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $i = 1, 2, ..., n$, entonces
$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu^i dS.$$

Teorema 2.2.5. (Integración por Partes)
Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ e $i = 1, 2, ..., n$, entonces
$$\int_\Omega u_{x_i} v \ dx = -\int_\Omega u v_{x_i} \ dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i \ dS.$$

Teorema 2.2.6. (Fórmulas de Green)
Sean $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces,

1. $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \ dS,$
2. $\displaystyle\int_\Omega Dv \cdot Du \ dx = -\int_\Omega u\Delta v \ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \ dS,$
3. $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \ dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \ dS.$

2.2.3. Convoluciones y suavización

En esta subsección introducimos el concepto de convolución que resulta particularmente útil para caracterizar el Semigrupo del Calor por medio de una integral que involucra el núcleo del calor, como se verá más adelante. Además, las convoluciones nos brindan una forma de suavizar funciones vía Mollifiers, herramienta necesaria para el estudio de las soluciones a problemas de valor inicial y/o de frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales, el lector podrá encontrar información más detallada acerca de este tópico en [11] y [59]. Para comenzar, consideremos a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y elijamos $\varepsilon > 0$. Denotamos a Ω_ε como sigue
$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Definición 2.2.7. (Mollifiers)

1. Definamos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

   donde la constante $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

2. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

   el cual llamaremos el Mollifier estándar. Las funciones η_ε son de clase C^∞ y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Definición 2.2.8. (Convolución)
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada y localmente integrable, entonces el producto convolución de f y g es la función $f \star g$ en Ω definida por

$$f \star g(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy.$$

Intuitivamente una convolución entre dos funciones f y g describe la cantidad de solapamiento que hay entre g al desplazarla sobre f. Esto motiva la definición de Mollificación, la cual es interpretada como una forma para "suavizar" funciones.

Definición 2.2.9. (Mollificación)
Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y $\varepsilon > 0$. Definimos la Mollificación sobre Ω_ε dada por

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f.$$

En esta breve familiarización con definiciones y teoremas que constantemente usaremos, observamos ciertos operadores y conjuntos de funciones, nociones que abordaremos con una mayor profundidad en la siguiente sección.

2.3. Tópicos previos de Análisis Funcional

Con el objetivo de realizar un estudio sobre los espacios de funciones introduciremos algunas nociones del Análisis Funcional. Antes de ello, es importante notar que cuando nos referimos al campo $\mathbb{F}$ nos referimos a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Recomendaremos al lector consultar las referencias [12] y [13] para más detalles.

2.3.1. Espacios Normados, Normas equivalentes y Espacios de Banach

Definición 2.3.1. (Norma)
Sea $(X, +, \cdot)$ un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Una norma sobre X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- Para cada λ y $x \in X$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$.
- Para cada $x \in X$, $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Para todo $x, y \in X$, tenemos la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Observemos que, en la primera condición de la definición anterior, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, entonces $|\cdot| : \mathbb{F} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será el valor absoluto. Por otro lado, si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces $|\cdot| : \mathbb{F} = \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ representa el módulo de los números complejos.

Definición 2.3.2. (Espacio Normado)
El par $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, donde $(E, +, \cdot)$ es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma definida sobre E.

Es importante notar que los Espacios Normados permiten crear una conexión entre el álgebra y el análisis gracias a la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. (Métrica generada por una norma)
Si $(E, \|\cdot\|)$ es un Espacio Normado, entonces la función $d : E \times E \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

es una métrica de E.

Así, por la proposición previa, conseguimos que (E, d) sea particularmente un Espacio Métrico. Esto nos permite utilizar en E conceptos y resultados de los Espacios Métricos. Tal métrica d es conocida como la *métrica generada por la norma* $\|\cdot\|$. Para este tipo de métricas, es importante señalar que ellas resultan invariantes por traslaciones y verifican un resultado de homogeneidad. Esto es, $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| d(x, y)$, para cada $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. La anterior observación nos permite deducir algunos resultados que enunciaremos a continuación y que serán útiles cuando estemos trabajando con Espacios Normados.

Proposición 2.3.4. Sea $(E, \|\cdot|\|)$ un Espacio Normado. Entonces,

- La *desigualdad triangular invertida* es verificada, esto es, dados $x, y \in E$, tenemos que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

- $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una función continua.
- Podemos reescalar los discos en E, esto es, dados $x \in E$ y $r > 0$, obtenemos las igualdades

$$B_r(x) = x + B_r(0) = x + rB_1(0),$$

donde $B_r(x)$ es el disco centrado en x con radio $r > 0$.

- Un conjunto $S \subseteq E$ es acotado (está contenido en algún disco) si y solo si está contenido en algún disco centrado en 0.

Por otro lado, hay momentos en los que la métrica inducida por dos normas distintas de un mismo espacio generan la misma topología. Esto intuitivamente es lo que ocurre cuando dos normas son equivalentes.

Definición 2.3.5. (Normas equivalentes)
Supongamos que sobre el $\mathbb{F}-$Espacio vectorial E definimos dos normas distintas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Diremos que estas dos normas son equivalentes, siempre que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2.$$

Definición 2.3.6. (Espacio de Banach)
Diremos que un Espacio Normado $(E, \|\cdot\|)$ es un Espacio de Banach si y solo si E con la métrica inducida por la norma es un espacio métrico completo.

2.3.2. Operadores Lineales y Operadores Auto-adjuntos

Recordemos que los Espacios Normados tienen una estructura de espacio vectorial, por tanto tiene sentido definir operadores lineales sobre Espacios Normados, por otro lado podemos inducir una norma sobre estos operadores lineales y conseguir nuevos Espacios Normados a partir de dichos operadores, en esta sección introduciremos de manera formal estos espacios de operadores, además abordaremos algunos resultados claves en la teoría de Operadores Lineales usada en el estudio de nuestro modelo, el lector puede encontrar más detalles en referencias como [12], [25] .

Definición 2.3.7. (Operador lineal acotado)
Sea $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ un operador lineal, diremos que T es acotado, si dado un conjunto acotado $S \subseteq X$ tenemos que $T(S)$ está acotado en Y.

Usualmente los dominios de un operador T los denotaremos por $D(T)$.

Definición 2.3.8. (Operador cerrado)
Decimos que un operador T es cerrado, si dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ que converge a $x \in D(T)$ y es tal que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cierto y, tenemos que si $x \in D(T)$ entonces $T(x) = y$.

Presentamos a continuación un resultado importante para caracterizar las transformaciones lineales acotadas.

Proposición 2.3.9. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal sobre los Espacios Normados $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- T es una función continua en X.
- T es una función continua en $0 \in X$.
- Existe $c \in (0, \infty)$ tal que, para cada $x \in X$, tenemos que $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$.
- $T(B_1(0))$ es un conjunto acotado en Y.
- T es acotado sobre cualquier bola.

Definición 2.3.10. (Norma sobre un operador lineal acotado)
Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal sobre los Espacios Normados $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, con $X \neq \{0\}$. La norma de T es definida como:

$$\|T\| := \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Observemos que el conjunto

$$\left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : \ x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

es no vacío si tomamos $X \neq \{0\}$, además si tenemos en cuenta que $T : X \to Y$ un operador lineal acotado entonces usando la proposición previa se va a tener que dicho conjunto es acotado en $\mathbb{R}$.
Además, podemos mostrar que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y.$$

La anterior igualdad nos da una caracterización útil de la norma de los operadores lineales acotados. Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.11. (Espacio de los operadores lineales acotados)
Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Espacios Normados, definimos el espacio vectorial de los operadores lineales acotados como el conjunto

$$B(X,Y) := \{T : X \to Y : \ T \text{ es lineal y acotado}\},$$

el cual forma un Espacio Normado dotado con la norma

$$T \mapsto \|T\|_{B(X,Y)} := \|T\|$$

para cada $T \in B(X,Y)$.

La definición previa nos permite introducir los espacios duales a un Espacio Normado dado.

Definición 2.3.12. (Espacio Dual)
Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un Espacio Normado sobre un campo $\mathbb{F}$, entonces definimos a X^* al conjunto

$$X^* := B(X,\mathbb{F}) := \{f : X \to \mathbb{F} : \ f \text{ es una función lineal contínua}\}.$$

Al espacio X^* lo llamaremos el *Espacio Dual* de X.

Sabemos que el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ puede dotarse de la Norma Euclídea $\|\cdot\|_2$, por lo tanto, es particularmente un Espacio Normado. Más aún, puede probarse que cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la Norma Euclídea. Sin embargo, un hecho particular de $\mathbb{R}^n$ es que tiene un *producto punto*, dicho producto punto motiva la generalización de los productos internos en Espacios Normados.

Definición 2.3.13. (Producto interno)
Sea H un $\mathbb{F}-$espacio vectorial, definimos el producto punto como la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ que satisface:

1. Para cada $x \in H$, la función $\langle\cdot, x\rangle : H \to \mathbb{F}$ es lineal.
2. Dados $x, y \in H$, tenemos que $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
3. Dado $x \in H$, $\langle x, x\rangle \geq 0$. Además, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A la dupla $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es conocida como Espacio Pre-Hilbert. Además, introducimos la norma $\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$, la cual es conocida como la norma inducida por el producto interno. Este tipo de de espacios tienen una peculiaridad y es que podemos definir la noción de ángulo, en virtud del siguiente resultado.

Lema 2.3.14. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)
Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un Espacio Pre-Hilbert, entonces

$$\text{Para cada } x, y \in H, \text{ tenemos que } |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Finalmente tenemos la siguiente definición

Definición 2.3.15. (Espacio de Hilbert)
Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Espacio Pre-Hilbert. Diremos que $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un Espacio de Hilbert si y solo si el Espacio Normado $(H, \|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ es un Espacio de Banach, donde $\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ representa la norma inducida por el producto punto $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Consideremos a H un Espacio de Hilbert real y denotemos por H^* a su Espacio Dual, el cual como ya vimos, consiste de todos los funcionales lineales definidos en H. El teorema de Representación de Riesz (ver por ejemplo [27]), nos muestra que todo elemento de H^* tiene la forma

$$u \longmapsto \langle u, v \rangle,$$

para algún $v \in H$ fijo. De está manera, podemos identificar a $\langle u, \cdot \rangle$ con u y, por lo tanto, $H = H^*$.

Denotemos por $R(B) \subseteq H$ al rango de cierto operador lineal cerrado $B : v \longmapsto Bv$ cuyo dominio $D(B) \subseteq H$ es denso.

Definición 2.3.16. (Operador Adjunto)

El Operador Dual o Adjunto de B denotado por B^*, es aquel que su dominio $D(B^*) \subseteq H$ es denso y satisface que

$$\langle u, Bv \rangle = \langle B^* u, v \rangle$$

para todo $v \in D(B)$, $u \in D(B^*)$. Además $D(B^*)$ será el conjunto de todos los $u \in H$ tales que el funcional $v \to \langle u, Bv \rangle$ es continuo bajo la norma asociada al espacio de Hilbert H.

En caso de que $B = B^*$, diremos que B es un operador auto-adjunto. Además, un operador auto-adjunto es definido positivo cuando $\langle v, Bv \rangle \geq 0$, para cada $v \in D(B)$. Bajo estas condiciones tenemos el siguiente lema.

Lema 2.3.17. Sean $B : D(B) \to H$, $D(B) \subseteq H$, un operador auto-adjunto definido positivo en un espacio de Hilbert H, y $0 \leq \alpha \leq 1$. Entonces,

$$\|B^\alpha v\| \leq \|Bv\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha} \leq \alpha \|Bv\| + (1-\alpha)\|v\|,$$

para todo $v \in D(B)$.

Los detalles de la demostración del lema previo se encuentran en [25], página 99.

2.3.3. Representación espectral y operadores fraccionados

A continuación mencionaremos algunos resultados relacionados a la representación espectral de los operadores auto-adjuntos. Para más detalles, el lector puede consultar, por ejemplo, las referencias [27], [28], [29].

Definición 2.3.18. (Subespacio ortogonal)

Sea $D \subseteq H$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H, definimos el subespacio ortogonal de D como el conjunto

$$D^\perp := \{u \in H : \ \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in D\}.$$

Notemos que cualquier espacio de Hilbert H puede descomponerse como la suma directa

$$H = D \oplus D^{\perp}.$$

De está manera, podemos plantear la siguiente definición.

Definición 2.3.19. (Proyección ortogonal)
Sea $D \subset H$ un subespacio cerrado. Definimos la proyección ortogonal de H en D como el operador $P : u \longmapsto Pu$, donde $Pu \in D$ es tal que existe un $\hat{u} \in D^{\perp}$ satisfaciendo

$$u = \hat{u} + Pu.$$

Observemos que P siempre será un operador auto-adjunto y positivo tal que $P^2 = P$ y $\|P\| \leq 1$. Con la anterior definición podemos considerar una familia de proyecciones. Tomemos $\lambda \in [0, \infty)$, definamos E_λ como el operador proyección, el cual proyecta a H sobre un subespacio $D_\lambda \subseteq H$. Considere la familia de proyecciones $\{E_\lambda : \ \lambda \geq 0\}$ y sea λ_0 tal que $0 \leq \lambda_0 \leq \infty$. Si para cada $v \in H$ se satisface la igualdad

$$E_{\lambda_0} v = \lim_{\lambda \to \lambda_0} E_\lambda v.$$

siendo esta convergencia con la norma $\| \cdot \|_H$, entonces introducimos la notación

$$E_{\lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} E_\lambda$$

la cual es una convergencia con la norma del operador $\| \cdot \|_{B(H, D_\lambda)}$.

Definición 2.3.20. (Resolución de la identidad)
Decimos que la familia de proyecciones $\{E_\lambda : \ \lambda \geq 0\}$ es la resolución de la identidad I en $[0, \infty)$, si verifica

1. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ para $0 \leq \lambda \leq \mu < \infty$,
2. $E_\lambda = s - \lim_{\mu \to \lambda} E_\lambda$ para $0 < \mu < \lambda < \infty$,
3. $E_0 = 0$ y $s - \lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda = I$.

Ahora considere $B : D(B) \to H$ un operador auto-adjunto y positivo tal que su dominio $D(B) \subset H$ es denso. Podemos demostrar ([29], I, 5.4) que existe una única resolución de la identidad $\{E_\lambda : \ \lambda \geq 0\}$ que cumple

$$B = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda, \quad D(B) = \{v \in H : \ \int_0^\infty \lambda^2 d\|E_\lambda\|^2 < \infty\},$$

a esta representación del operador B se le denomina representación espectral, ver ([29], VI, 5.1) para más detalles.

Observemos que la integral que se usa en la representación espectral es la integral de Riemann-Stieltjes, la cual es una generalización natural de la integral de Riemann clásica en donde las particiones de las sumas de Riemann son afectadas por cierta función integradora, en nuestro caso E_λ. Para más detalles, recomendamos consultar [30]. Entretanto, esta representación juega un papel preponderante en la facilitación del manejo de diversos operadores que serán utilizados en el modelo que estudiaremos en el siguiente capítulo. Además, esta representación nos permite introducir el concepto de operadores fraccionados.

Definición 2.3.21. Bajo las mismas hipótesis de la definición previa, definimos el operador fraccionado B^α, con $\alpha \geq 0$, como

$$B^\alpha := \int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda$$

con dominio

$$D(B^\alpha) := \left\{ v \in H : \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\|E_\lambda v\|^2 < \infty \right\}.$$

2.4. Espacios L^p

Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathscr{M}-$medible e integrable. Si asumimos por un momento que $X = \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int |f| d\mu$ representa el área por encima del dominio X y por debajo de la gráfica de $|f|$. En esta sección vemos que esta área puede ser interpretada como una norma y que ciertas variaciones de dicha "área" definen normas en espacios adecuados. Además, vamos a estudiar algunas propiedades de dichos espacios así como unas estimativas útiles que usaremos en el estudio de nuestro modelo en el siguiente capítulo. Si el lector desea profundizar en el estudio de estos espacios recomendamos revisar los libros [2] y [12], principalmente.

2.4.1. Definición de los espacios L^p y algunas consideraciones

En este apartado definimos los espacios L^p y hacemos unas consideraciones que resultan útiles en el tratamiento y entendimiento de dichos espacios. En términos generales, estos espacios presentan desigualdades clásicas que jugarán un rol vital en el desarrollo de los resultados presentados en el siguiente capítulo.

Definición 2.4.1. (Exponentes conjugados)
Decimos que los números reales $p, q \in (1, \infty)$ son exponentes conjugados, si

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Observemos que si en la igualdad previa $p \to 1^+$, entonces $q \to +\infty$ y viceversa. Motivados por esto, diremos que 1 y ∞ son exponentes conjugados. De aquí en adelante, denotamos al exponente conjugado de $p \in [1, \infty]$ por el símbolo p'.

Lema 2.4.2. (Desigualdad de Young)
Sean a y b números positivos y $p \in (1, \infty)$, entonces

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q},$$

donde $q = p'$.

Lema 2.4.3. (Desigualdad de Cauchy con ε)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \tfrac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Teorema 2.4.4. (Desigualdad de Hölder)
Sean $p, q \in [1, \infty]$ exponentes conjugados y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces:

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.4.5. (Desigualdad de Minkowski)
SI $p \in [1, \infty]$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces

$$\left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Procedamos a definir los espacios L^p, para ello vamos a considerar dos casos, cuando p es finito y cuando $p = \infty$. Primero, para $p \in [1, \infty)$, considere el conjunto

$$E_p = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \; f \text{ es medible y } \int |f|^p < \infty \right\}.$$

Observemos que E_p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por otro lado, cabe resaltar que la desigualdad de Minkowski garantiza la cerradura sobre la suma en dicho espacio vectorial. Más aún, consideremos la función $\| \cdot \|_p : E_p \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para cada } f \in E_p.$$

Dicha función satisface la desigualdad triangular gracias a la desigualdad de Minkowski. Además, para cada función medible $f : X \to \mathbb{R}$, tenemos que $\|f\|_p \geq 0$. Sin embargo, si $\|f\|_p = 0$ solo se podrá concluir que $f = 0$ c.t.p en X, lo cual implica que la función $\| \cdot \|_p : E_p \to \mathbb{R}$ no es una norma sobre E_p. Para subsanar este inconveniente, vamos a identificar como iguales a las funciones medibles $f, g : X \to \mathbb{R}$ que coincidan c.t.p en X. En este caso, denotamos $f \sim g$ y notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición 2.4.6. (Espacios L^p)
Para $p \in [1, \infty)$, definimos el espacio

$$L^p(X,\mathscr{M},\mu) := {}^{E_p}/_{\sim} = \{[f] : \ f \in E_p\},$$

donde $[f]$ denota la clase de equivalencia de f bajo la relación de equivalencia $\sim$.

Proposición 2.4.7. Si $p \in [1,\infty)$, entonces la función $\|\cdot\|_p : L^p(X,\mathscr{M},\mu) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|\overline{f}\|_p := \left(\int |\overline{f}|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ con } \overline{f} \in L^p(X,\mathscr{M},\mu),$$

es una norma.

Ahora vamos a suponer que $p=\infty$. Entonces, consideremos el siguiente conjunto

$$E_\infty = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ medible} : \ \exists c \in [0,\infty), \ |f(x)| \leq c, \ \text{c.t.p en } X\}.$$

Cualquier función f contenida en el conjunto E_∞ es conocida como función esencialmente acotada y al número c, definido en E_∞, es denominada como la cota esencial de f.

Definición 2.4.8. (Supremo esencial)
Para $f \in E_\infty$, definimos el supremo esencial como el ínfimo de las cotas esenciales como sigue

$ess\sup|f| := \text{ínf}\{c \in [0,\infty) : |f(x)| \leq c, \text{ c.t.p en } X\}$. Sin embargo, a partir de una relación de equivalencia en E_∞, será una norma, como mostramos a continuación.

De manera análoga al caso $1 \leq p < \infty$, la función $f \in E_\infty \longmapsto \|f\|_\infty := ess\sup|f|$ no es una norma en E_∞.

Definición 2.4.9. (Espacio L^∞)
Definimos

$$L^\infty(X\mathscr{M},\mu) := {}^{E_p}/_{\sim} = \{[f] : \ f \in E_\infty\}.$$

Con la anterior definición, garantizamos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.10. $\|f\|_\infty := ess\sup|f|$ es una norma en $L^\infty(X,\mathscr{M},\mu)$.

Desde ahora, para $p \in [1,\infty]$, consideraremos a $L^p(X,\mathscr{M},\mu)$ equipado con la norma $\|\cdot\|_p$, la cual también denotaremos como $\|\cdot\|_{L^p}$.

La anterior discusión brinda al lector una visión más amplia de qué es un espacio L^p. En la literatura suele pasarse por alto estos detalles, los cuales suelen generar confusión. Sin embargo, para efectos prácticos y a partir de ahora, vamos a ver a los elementos de $L^p(X,\mathscr{M},\mu)$ simplemente como funciones en lugar de clases de funciones. De está manera, vamos a identificar a $L^p(X,\mathscr{M},\mu)$ como E_p, teniendo el debido cuidado de que la igualdad en los espacios L^p significa igualdad de funciones c.t.p en X. En particular, en este documento nos centraremos con el caso $X=\mathbb{R}^n$ para algún entero positivo n o $X=\Omega\subset\mathbb{R}^n$ con Ω siendo un conjunto Lebesgue medible. Además, nuestro μ será la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Así, por simplicidad, usaremos la notación L^p o $L^p(\Omega)$, de igual forma vamos a usar frecuentemente la notación $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ para referirnos a su norma. Tenemos además que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar está dado por

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

para cada $u, v \in L^2(\Omega)$.

2.4.2. Propiedades de los espacios L^p

A continuación mostraremos algunos resultados que fueron necesarios para el análisis de existencia, unicidad, regularidad y estabilidad del modelo estudiado. La mayoría de estos resultados son clásicos dentro de esta teoría, los cuales pueden ser encontrados en las referencias [6] y [10].

Teorema 2.4.11. (Completez de los espacios L^p)
Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida y $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.4.12. (Inclusión de los espacios $L^p - L^q$)
Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida, entonces, para cada $1 \leq p < q \leq +\infty$,

$$L^q(X, \mathscr{M}, \mu) \subset L^p(X, \mathscr{M}, \mu).$$

Más aún,

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_q,$$

donde $r > 0$ es tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Teorema 2.4.13. (Teorema de Arzela-Ascoli)
Sea K un Espacio Métrico y sea $\mathscr{H}$ un subconjunto acotado de $C(K)$. Asuma que $\mathscr{H}$ es uniformemente equicontínua, esto es

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathscr{H}.$$

Entonces la clausura de $\mathscr{H}$ en $C(K)$ es compacta.

La demostración del anterior resultado puede ser encontrada en [31].

Teorema 2.4.14. (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz)
Sea T un operador lineal de $L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ a sí mismo, donde $1 \leq q < r < \infty$, y supongamos que existen constantes T_1 y T_2 tales que

$$\mu_{T(f)}(t) \leq \left(\frac{T_1\|f\|_q}{t}\right)^q,\ \mu_{T(f)}(t) \leq \left(\frac{T_2\|f\|_r}{t}\right)^r,$$

para todo $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ y $t > 0$. Entonces T se extiende como operador lineal acotado en $L^p(\Omega)$ a sí mismo, para cada p tal que $q < p < r$, y

$$\|T(f)\|_p \leq C T_1^{\alpha} T_2^{1-\alpha} \|f\|_p,$$

para todo $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. Aquí,

$$\tfrac{1}{p} = \tfrac{\alpha}{q} + \tfrac{1-\alpha}{r}$$

y C depende solamente de p, q y r.

La demostración del anterior resultado puede ser encontrada en [24].

Teorema 2.4.15. (Teorema de interpolación de Nirenberg)
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $1 \leq q, r \leq \infty$ y $u \in L^q(\Omega)$ y supongamos que $D^m u \in L^r(\Omega)$. Luego, para $0 \leq j < m$, existe $C > 0$ tal que

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha},$$

donde

$$\tfrac{1}{p} = \tfrac{j}{n} + a\left(\tfrac{1}{r} - \tfrac{m}{n}\right) + (1-\alpha)\tfrac{1}{q}$$

y $\alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$.

La demostración del anterior resultado puede ser encontrada en [26].

2.5. Espacios de Hölder y Sobolev

En esta sección introduciremos los espacios de Hölder y Sobolev y algunas de sus propiedades, los cuales son importantes para el entendimiento de las demostraciones del siguiente capítulo. Recomendamos al lector consultar las referencias [6] y [25] para más detalles.

Iniciamos definiendo los espacios de Hölder. Para ello, consideremos un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $0 < \gamma \leq 1$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que u es Hölder continua con exponente γ cuando existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma},$$

para cada $x, y \in \Omega$.
Adicionalmente, asumamos que u es una función acotada y continua con lo cual introducimos la siguiente notación

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Bajo esta consideración realizaremos las siguientes definiciones.

Definición 2.5.1. ($\gamma-$ésima seminorma de Hölder)
Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función Hölder contínua con exponente γ, definimos la $\gamma-$ésima seminorma de Hölder como

$$[u]_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}}.$$

Definición 2.5.2. ($\gamma-$ésima norma de Hölder)
Bajo las hipótesis anteriores, establecemos la $\gamma-$ésima norma de Hölder como la cantidad

$$\|u\|_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

El conjunto de todas las funciones u satisfaciendo $\|u\|_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty$ es denotado por $C^{\gamma}(\Omega)$.

Finalmente, vamos a definir los espacios de Hölder con parámetros más generales.

Definición 2.5.3. (Espacios de Hölder)
Definimos el Espacio de Hölder, el cual denotaremos por $C^{k+\gamma}(\overline{\Omega})$, donde k es un entero no negativo y $\gamma \in (0,1]$, como el conjunto de funciones $u \in C^{k}(\overline{\Omega})$ tales que la norma:

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|<k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^{\alpha}u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

es finita.

Durante el estudio del modelo, constantemente vamos a separar nuestros análisis centrándonos en componentes específicas de funciones de dominio multivariado. Esto es, si queremos expresar que bajo ciertas componentes en D_1 una función específica es $\alpha-$Hölder y bajo otras componentes en D_2 esta misma función es $\beta-$Hölder, entonces escribimos $C^{\alpha,\beta}(D_1 \times D_2)$. Así, por ejemplo, si consideramos una función $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in [0,T]$, $u(\cdot,t) \in C^{\alpha}(\Omega)$ y tal que, para todo $x \in \Omega$, $u(x,\cdot) \in C^{\beta}([0,T])$, entonces escribimos $u \in C^{\alpha,\beta}(\Omega \times [0,T])$.

Ahora vamos a definir el concepto de derivada débil. Para ello, consideramos $u \in C^{k}(\Omega)$ y $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. El conjunto $C_c^{\infty}(\Omega)$ corresponde a aquel cuyos elementos, denominados funciones test, son funciones suaves con soporte compacto. A modo de motivación observemos que al usar la integración por partes tenemos que

$$\int_{\Omega} u\phi_{x_i} dx = -\int_{\Omega} u_{x_i}\phi dx + \int_{\partial\Omega} u\phi\nu^{i} dS = -\int_{\Omega} u_{x_i}\phi dx,$$

donde ν^{i} es un vector ortonormal a la superficie $\partial\Omega$ y la última igualdad es obtenida debido a que phi es nula en la frontera. Ahora consideremos el multiíndice α tal que $|\alpha| = k$. Entonces, derivando reiteradas veces con respecto a este multiíndice, obtenemos la ecuación

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha}u\phi dx.$$

Aquí, cabe destacar que si u no perteneciera al espacio $C^k(\Omega)$, entonces para que la expresión dada en el lado izquierdo de la anterior igualdad sea válida, deberíamos tener que $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ (este espacio denota a todas las funciones integrables localmente). Sin embargo, si apenas $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ la expresión del lado derecho de la anterior igualdad no tendría sentido ya que $D^\alpha u$ no estaría bien definido. Esta tendría sentido, si $u \in C^k(\Omega)$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.5.4. (Derivada débil)
Supongamos que $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Decimos que v es la $\alpha-$ésima derivada parcial débil de u, si verifica la siguiente igualdad

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx,$$

para cualquier Función Test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. En este caso, diremos que $D^\alpha u = v$ en un sentido débil.

Un resultado inmediato es que si $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tiene una $\alpha-$ésima derivada parcial débil, entonces necesariamente esta será única excepto en un conjunto de medida cero. Con el concepto previo podemos introducir ahora los espacios de Sobolev.

Definición 2.5.5. (Espacios de Sobolev)
Sea $1 \leq p \leq \infty$ y k un entero no negativo. Definimos el espacio de Sobolev, el cual denotaremos por $W^{k,p}(\Omega)$, como el conjunto de todas las funciones $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tales que, para cualquier multiíndice α tal que $|\alpha| \leq k$, tenemos que existe $D^\alpha u$ en el sentido débil y esta pertenece a $L^p(\Omega)$. Además, podemos definir en $W^{k,p}(\Omega)$ la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Observemos que $W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$. Además en caso de que $k = 1, 2$ observe que

$$\nabla u := (D_j u)_{j=1}^n, \quad \nabla^2 u := (D_j D_l u)_{j,l=1}^n,$$

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \|\nabla^2 u\|_{L^q(\Omega)} := \left(\sum_{j,l=1}^n \|D_j D_l u\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

con $1 \leq q < \infty$ y

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{j=1,\ldots,n} \|D_j u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|\nabla^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} := \max_{j,l=1,\ldots,n} \|D_j D_l u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Con lo cual

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} = \|u\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \text{ y}$$
$$\|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} = \|u\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla^2 u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Además, de manera análoga al caso de la norma en L^p, el espacio $W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar es

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle,$$

donde $u, v \in W^{k,2}(\Omega)$. En particular, si $k = 1$, entonces el producto escalar más utilizado en el espacio de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$ está dado por

$$\langle u, v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle := \int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ ds.$$

Definición 2.5.6. (Espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$)
Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, recordando que C_c denota el conjunto de todas las funciones continuas con soporte compacto.

2.5.1. Resultados en espacios de Sobolev

A continuación presentamos un compendio de desigualdades y resultados relacionados con los espacios de Sobolev, muchos de estos resultados son clásicos y pueden ser encontrados en referencias como [6], [11] y [27] .

Asumiendo que estamos trabajando sobre $\mathbb{R}^n$, definimos

Definición 2.5.7. (Conjugado de Sobolev)
Si $1 \leq p < n$, el conjugado de Sobolev de p es

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Observemos que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p.$$

Teorema 2.5.8. (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg)
Supongamos que $1 \leq p < n$. Entonces, existe una constante $C > 0$ (que depende únicamente de p y n) tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, siendo este último el espacio de funciones de clase C^1 cuyo soporte es compacto.

Teorema 2.5.9. (Estimativas para $W^{1,p}, 1 \leq p < n$)
Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase C^1. Si $1 \leq p < n$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces podemos estimar a u en la norma $L^{p^*}(\Omega)$ con la siguiente desigualdad

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde la constante C depende únicamente de p, n y Ω.

Definición 2.5.10. (Inclusión compacta)
Sean X y Y espacios de Banach tal que $X \subseteq Y$. Decimos que X está compactamente incluido en Y, cuando

1. existe una constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$,
2. toda sucesión acotada en X es un compacto relativo en Y.

En tal caso, denotamos $X \subset\subset Y$.

Teorema 2.5.11. (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov)
Suponga que Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\partial\Omega$ es C^1. Si $1 \leq p < n$, entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

A modo de observación, si $p^* > p$ y $p^* \to \infty$ cuando $p \to n$, nosotros tenemos que, en particular,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Estimativas de Poincaré

A lo largo del desarrollo de los resultados principales de nuestro modelo constantemente nos veremos en la necesidad de comparar la L^p-norma de una función u con la L^p-norma de ∇u. Las estimativas que necesitaremos son usualmente llamadas estimativas de tipo Poincaré. Para más detalle acerca de estas estimativas y sus demostraciones. recomendamos al lector consultar las referencias [33], [34], [35], [36] y [37].

Teorema 2.5.12. (Desigualdad de Poincaré)
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ un dominio acotado, $1 < q < \infty$ y consideremos

$$d = d(\Omega) := \sup_{x,y\in\Omega} |x - y|$$

como el diámetro de Ω. Entonces, existe $C := C(q, d) > 0$ (que solo depende de q y d) tal que, para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tenemos que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 2.5.13. (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)
Sean $p \in [1, \infty]$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de tipo Lipschitz. Entonces, existe $C := C(\Omega, p)$ tal que, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

donde

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)dy.$$

2.6. Generalidades sobre las Ecuaciones Diferenciales

En esta sección introducimos conceptos básicos sobre las ecuaciones diferenciales parciales y abordamos algunos casos particulares de las mismas, debido a su rol fundamental en el desarrollo de los teoremas principales de nuestro modelo (4-1). El lector puede ahondar en detalles en textos como [6] sobre conceptos básicos, un estudio amplio sobre la ecuación del Calor puede ser encontrado en [38] y en el libro [25] el lector puede encontrar más detalles sobre la ecuación de Navier-Stokes tratando operadores fraccionarios.

2.6.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EPD)

Un primer acercamiento a las ecuaciones diferenciales fue realizado durante el nacimiento del Cálculo por parte de los matemáticos Isaac Newton $(1643 - 1727)$ y Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$, de forma simultanea, los cuales estaban interesados en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Estas ecuaciones relacionan a una función desconocida de una y solo una variable con sus derivadas. La motivación en este contexto histórico fue clara, se abarcó principalmente el problema inverso a la diferenciación en una variable. Posteriormente, la teoría fundamental de las Ecuaciones Difereciales Parciales (EDP), las cuales involucran relaciones de funciones de dos o más variables con sus respectivas derivadas parciales, fue desarrollado.

Definición 2.6.1. (Ecuación Diferencial Parcial)
Considere la función

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

F define la Ecuación Diferencial Parcial de orden k, como la ecuación

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \text{ con } x \in \Omega,$$

donde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es la función incógnita.

Esta definición puede ser extendida, al considerar un conjunto de m ecuaciones diferenciales parciales de orden k con la m-upla de incógnitas $(u_1, u_2, ..., u_m)$. En tal caso, diremos sistemas de EDP's tal como ocurre en nuestro modelo (4-1).

Es importante mencionar que la función F, dada en la Definición 2.6.1, nos permite clasificar a las Ecuaciones Diferenciales Parciales dependiendo de su linealidad, como se muestra a continuación.

Definición 2.6.2. (Clasificación de EDP's de acuerdo a su linealidad)

1. Una EDP se dice que es lineal cuando tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x),$$

   donde cada a_α y f son funciones dadas. Particularmente, decimos que una EDP lineal es homogénea siempre que $f = 0$.

2. Una EDP es semilineal, si tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

3. Decimos que una EDP es cuasilineal cuando tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

4. Una EDP es completamente no lineal, si esta depende de forma no lineal con derivadas de ordenes superiores.

Observación 1. No existe una teoría general que nos permita saber si una EDP tiene solución. De hecho, existen problemas abiertos relacionados a la solución de las EDP's, un ejemplo de ello es el famoso problema del milenio de la resolubilidad global de las ecuaciones de Navier-Stokes [56].

Una pregunta que surge en el estudio de las ecuaciones diferenciales es ¿Cuándo una solución es lo suficientemente buena? Bajo este interrogante Jacques Hadamard (1865−1963) introdujo la siguiente definición.

Definición 2.6.3. (Problema bien puesto)
Un problema está bien puesto, si cumple las siguientes 3 condiciones:

1. Existe una solución al problema.

2. La solución es única.

3. La solución cambia de forma continua con los datos iniciales.

Es importante mencionar que la condición 3 de la definición previa nos permite construir actualmente modelos numéricos a ciertos problemas matemáticos, lo cual resulta particularmente bueno en el desarrollo de la ciencia ya que muchos de estos modelos están intrínsecamente relacionados a fenómenos naturales como ocurre con nuestro sistema (4-1).

Algunas veces no podemos conseguir soluciones de clase C^∞; sin embargo, resulta más útil conseguir una solución que al menos sea de clase C^k en una EDP de orden k. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.6.4. (Solución clásica de una EDP)
Una solución de una EDP de orden k se dice que es clásica cuando esta satisface los numerales 1, 2 de (2.6.3) y, además, es continuamente diferenciable al menos hasta la derivada $k-$ésima.

Existen otros tipos de nociones sobre la solución a una EDP. Es importante mencionar que en algunas EDP's podemos conseguir funciones que no sean soluciones en un sentido clásico debido a una carencia en suavidad y sin embargo correspondan en algún sentido subyacente a una solución a la EDP, cuando ocurre esto diremos que la solución a la EDP es débil.

2.6.2. Ecuación del calor

En las demostraciones de nuestros resultados principales de nuestro modelo, constantemente usamos el Semigrupo del Calor. Definiremos a continuación qué es exactamente el Semigrupo del Calor y qué papel juega en las ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 2.6.5. (EDP del calor)
Se define la Ecuación del Calor como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{2-1}$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Uno de los problemas más interesantes relacionados a la Ecuación del Calor es el denominado Problema de Cauchy. A continuación postulamos el Problema de Cauchy con ecuación de calor y dato inicial. Básicamente, supongamos que en un instante $t = 0$ conseguimos unos datos iniciales $f(x)$, definidos en $\mathbb{R}^n$, donde f es una función continua y, además, deseamos encontrar una función $u(x,t)$ que cumpla las siguientes condiciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = f. \end{cases}$$

Aquí, si la solución que queremos es clásica, entonces debemos buscar una función u contenida en $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Definición 2.6.6. (Kernel del calor en $\mathbb{R}^n$)
Sea $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos el kernel del calor como

$$p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Proposición 2.6.7. La función $p_t(x)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, es positiva y satisface (2-1), además cumple la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx = 1.$$

El Kernel del Calor no solo nos permite encontrar una solución a la ecuación del calor básica (2-1), también via convoluciones nos permite encontrar una solución al Problema de Cauchy.

Teorema 2.6.8. Si f es una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$ entonces la función

$$u(t,x) = p_t \star f(x)$$

es C^∞ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ y satisface el Problema de Cauchy, más aún, si $t \to 0$ entonces $u(x,t) \to f(x)$ y

$$\text{ínf}\, f \leq u(x,t) \leq \sup f.$$

2.6.3. Criterios de comparación

Lema 2.6.9. (Criterio de comparación para EDO)
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables y $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que dado $t \in \mathbb{R}$ satisface las relaciones

$$f'(t) \leq \phi(f(t),t) \text{ y } g'(t) = \phi(g(t),t).$$

Si $f(0) \leq g(0)$, entonces $f(t) \leq g(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.6.10. Supongamos que $a \in (0,1)$ y que $M, C_1, C_2 > 0$ son constantes que satisfaciendo

$$M \leq C_1 + C_2 M^a.$$

Entonces,

$$M \leq \text{máx}\{2C_1, (2C_2)^{\frac{1}{1-a}}\}.$$

Lema 2.6.11. Sean $T > 0, \tau \in (0,T), a > 0$ y $b > 0$. Supongamos que h es una función no negativa tal que $h \in L^1_{loc}([0,T))$ y satisface, para todo $t \in [0, T-\tau)$, la siguiente desigualdad

$$\int_t^{t+\tau} h(s)ds \leq b.$$

Asumamos que $y : [0, T) \to [0, \infty)$ es absolutamente continua y verifica, para c.t.p en $(0, T)$, la siguiente inecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) \leq h(t).$$

Entonces,

$$y(t) \leq \text{máx}\left\{y(0) + b, \frac{b}{a\tau} + 2b\right\}$$

para cada $t \in (0, T)$.

2.7. Semigrupos

En esta sección introduciremos el concepto de Semigrupo y su relación con la solución a ciertas ecuaciones diferenciales. Los Semigrupos juegan un papel preponderante en la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales y es un concepto clave en la solución del problema que estudiaremos en el siguiente capitulo. Para más detalles recomendamos al lector revisar [38] y [39].

2.7.1. Teoría general de los Semigrupos

Empezaremos esta subsección con una motivación del concepto de Semigrupo. Supongamos momentáneamente que A es un número real y que t es una variable real. Sabemos que la función e^{tA} puede ser representada a través de la siguiente serie de potencias

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{2-2}$$

Esta definición la podemos extender al caso en el que A es un operador lineal acotado en un espacio de Banach E. En cuyo caso la anterior serie convergería dentro del álgebra de los operadores acotados de X, la cual denotaremos por $\mathscr{L}(X)$. Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, tendremos que e^{tA} es un operador acotado en dicho espacio.
Suponga que tenemos un operador lineal no acotado A en un espacio de Banach y tenemos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - Au = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

donde u_0 es una cantidad conocida y la función incógnita u se encuentra definida en $\mathbb{R}^+$. Asumamos por un momento que podemos extender la serie (2-2) en dicho operador lineal no acotado A. Observemos que la función $\hat{u} := e^{tA}u_0$ es claramente una solución al anterior problema de Cauchy. En este sentido, estamos interesados en saber cuándo dicho operador A puede ser extendido teniendo en cuenta que no es acotado.

Definición 2.7.1. (Semigrupo de operadores lineales acotados)
Sea $\mathscr{L}(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X y definamos $\mathscr{S} : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(X)$ una función que cumple:

1. $\mathscr{S}(0) = I$, donde I es la identidad X,

2. $\mathscr{S}(t+s) = \mathscr{S}(t)\mathscr{S}(s)$ para cada $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Ahora definiremos un Semigrupo de clase C_0. Intuitivamente un Semigrupo es de clase C_0, si $\mathscr{S}(t)$ se acerca tanto como se desee a la identidad cuando $t \to 0^+$. Cabe recalcar que esta convergencia es dada bajo la norma de operadores lineales acotados.

Definición 2.7.2. (Semigrupo de clase C_0)
Diremos que un Semigrupo $\mathscr{S}$ es de clase C_0, si

$$\lim_{t\to 0^+} \|(\mathscr{S}(t) - I)x\| = 0 \text{ para cada } x \in X.$$

Definición 2.7.3. (Semigrupo de contracción)
Diremos que $\mathscr{S}$ es un semigrupo de contracción, si $\|\mathscr{S}(t)\| < 1$ para todo $t \geq 0$.

Definición 2.7.4. (Generador infinitesimal de un Semigrupo)
Definimos el Generador infinitesimal del semigrupo $\mathscr{S}$ como un mapeo $A : D(A) \to X$ tal que

$$A(x) := \lim_{h\to 0} \frac{(\mathscr{S}(h) - I)x}{h} \text{ para cada } x \in D(A).$$

Aquí, $D(A)$ (dominio de A) es definido como el conjunto

$$D(A) = \{x \in X : \ \lim_{h\to 0} \tfrac{(\mathscr{S}(h)-I)x}{h} \text{ existe}\}.$$

Ahora vamos a considerar algunas propiedades básicas de los Semigrupos.

Proposición 2.7.5. El conjunto $D(A)$ es un subespacio vectorial de X. Además, A es un operador lineal.

Proposición 2.7.6. (Estimativo para un C_0-Semigrupo)
Si $\mathscr{S}$ es un C_0-Semigrupo, entonces existe $M \geq 1$ tal que, para cada $t \geq 0$, tenemos

$$\|\mathscr{S}(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

para alguna constante positiva ω.

Ahora introducimos algunos resultados importantes que nos ofrecen una caracterización importante de la derivada de un C_0-Semigrupo.

Proposición 2.7.7. Sea A un generador infinitesimal de un C_0-Semigrupo $\mathscr{S}(t)$. Si $x \in D(A)$, entonces

1. $\mathscr{S}'(t)x = A\mathscr{S}(t)x$,
2. $\mathscr{S}(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$.

Además, tenemos el siguiente enunciado que nos garantiza la unicidad de dos Semigrupos con mismo generador infinitesimal.

Proposición 2.7.8. Si $\mathscr{S}_1(t)$ y $\mathscr{S}_2(t)$ tienen un mismo generador infinitesimal, entonces $\mathscr{S}_1(t) = \mathscr{S}_2(t)$.

Supongamos que $X \neq \{0\}$ es un espacio de Banach real o complejo, entonces definimos la complexificación del espacio X como

$$\hat{X} = \{x + iy : \ x, y \in X\}, \quad \|x + iy\|_{\hat{X}} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|x\cos\theta + y\sin\theta\|.$$

Similarmente, considere el operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$, la complexificación de A es definida como

$$D(\hat{A}) = \{x + iy : \ x, t \in D(\hat{A})\}, \quad \hat{A}(x + iy) = Ax + iAy.$$

En caso de no haber confusión nos referiremos a A y X como espacios de Banach complexificados o sin complexificar indiscriminadamente.

Definición 2.7.9. (Resolvente y espectro)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. El conjunto resolvente, denotado por $\rho(A)$, y el espectro, denotado por $\sigma(A)$, de A son definidos como

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}, \quad \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Los números complejos $\lambda \in \rho(A)$ tales que el operador $\lambda I - A$ no resulta uno a uno son denominados valores propios. Además, el conjunto $\sigma_p(A)$ que consiste de todos los valores propios de A se denomina espectro puntual. Por comodidad, si $\lambda \in \rho(A)$ denotamos

$$(\lambda I - A)^{-1} =: R(\lambda, A).$$

A $R(\lambda, A)$ lo denominamos el operador resolvente o simplemente el resolvente de A.

2.7.2. Semigrupos analíticos

Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$. Retomaremos el problema de Cauchy con valores inicialeles (2-2), donde $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal con dominio no necesariamente denso.

Definición 2.7.10. (Operador sectorial)
Decimos que A es un operador lineal sectorial cuando existen constantes $\omega \in \mathbb{R}$ y $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ con $M > 0$ tal que

1. $\rho(A) \supset S_{\theta,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda \neq \omega, \ |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$,
2. $\|R(\lambda, A)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|}$ para todo $\lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Debido a que el conjunto resolvente no es vacío implicará que A es un operador lineal cerrado, más aún, se puede dotar al conjunto $D(A)$ de una norma definida como

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|.$$

Además, podemos definir el operador e^{tA} en X como

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega+\gamma_{r,\eta}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda,$$

donde $r > 0, \eta \in (\frac{\pi}{2}, \theta)$ y $\gamma_{r,\eta}$ es la curva

$$\gamma_{r,\eta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| = \eta, |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| \leq \eta, |\lambda| = r\}$$

orientada en sentido anti-horario.

Definición 2.7.11. (Semigrupo analítico generado por A)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador sectorial. El semigrupo generado por A en X se definirá como $\{e^{tA} : \ t \geq 0\}$.

2.7.3. Semigrupo del Calor

Recordemos que el Kernel del Calor lo denotamos por $p_t(x)$ y está definido sobre $\mathbb{R}^n$, sea Δ el operador de Laplace en $\mathbb{R}^n$, definimos el Semigrupo del Calor como

Definición 2.7.12. (Semigrupo del Calor)
La familia de operadores $\{P_t\}_{t\geq 0}$ que satisfacen para cada $t \geq 0$ que

$$P_t f = \begin{cases} p_t \star f & t > 0, \\ f & t = 0, \end{cases}$$

la definiremos como el Semigupo del Calor.

Además, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ el operador $-\Delta$ es positivo en $C_c^\infty(\Omega)$ y admite extensiones auto-adjuntas, ver por ejemplo [57], por lo cual podemos escribir $P_t = e^{t\Delta}$.

2.7.4. Algunas propiedades generales de e^{tA} y del semigrupo del calor

A continuación presentamos algunas propiedades del semigrupo del calor y su relación con operadores fraccionarios. Muchas de estas propiedades enmarcadas en esta parte juegan un papel vital en el entendimiento y desarrollo del modelo matemático estudiado. Recomendamos al lector consultar [39] para más detalles.

Asumiremos que $A : D(A) \to X$ es un operador Sectorial y que $\{e^{tA}\}$ es el semigrupo analítico generado por dicho operador, además como caso particular denotamos al semigrupo del calor $\{e^{t\Delta}\}$ como es usual.

Proposición 2.7.13. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $e^{tA}x \in D(A^k)$ para todo $t > 0$, $x \in X, k \in \mathbb{N}$. Además, si $x \in D(A^k)$ entonces dado un $t \geq 0$ tenemos que
$$A^k e^{tA} x = e^{tA} A^k x.$$
2. Si $t, s \geq 0$, entonces $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$.
3. La función $t \mapsto e^{tA}$ pertenece a $C^\infty((0,\infty); \mathscr{L}(X))$ y para todo $t > 0$
$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tA} = A^k e^{tA}.$$
Más aún, existe una única extensión analítica en el sector
$$S = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda \neq 0,\ |\arg \lambda| < \theta - \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Lema 2.7.14. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$, un dominio acotado con frontera suave, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ y $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ el semigrupo Neumann del calor en Ω. Entonces, existen constantes $C_3, \lambda_1 > 0$ (que dependen solo de Ω) tales que
$$\|\nabla e^{t\Delta}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_3 (1 + t^{-\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}) e^{-\lambda_1 t} \|z\|_{L^q(\Omega)},$$
para todo $t > 0$ y cada $z \in L^p(\Omega)$.

El lector puede recurrir a [5], Lema 1.3 si desea obtener detalles de la demostración del lema previo.

Lema 2.7.15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ un dominio acotado cuya frontera es suave, y vamos a denotar a Δ como el Laplaciano en $L^s(\Omega)$, $s \in (1, \infty)$, con dominio
$$\{z \in W^{2,s}(\Omega) \|\ \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Entonces, el operador $-\Delta + 1$ es sectorial y posee potencias fraccionarias cerradas $(-\Delta + 1)^\eta$, donde $\eta \in (0,1)$ con dominio denso $D((-\Delta + 1)^\eta)$. Más aún, tenemos las siguientes propiedades:

1. Si $m \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$ y $q \in (1,\infty)$, entonces existe una constante $C_1 > 0$ tal que, para todo $z \in D((-\Delta + 1)^\eta)$, tenemos que

$$\|z\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C_1\|(-\Delta+1)^\eta z\|_{L^q(\Omega)}$$

siempre que $m < 2\eta$ y $m - N/p < 2\eta - N/q$.

2. Si $p \in (1,\infty)$, entonces existe una constante $C_2 > 0$ tal que, para cada $z \in L^p(\Omega)$ y $t > 0$,
$$\|(-\Delta+1)^\eta e^{t\Delta} z\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 t^{-\eta}\|z\|_{L^p(\Omega)}.$$

3. Si $p \in [1,\infty)$, entonces al semigrupo del calor asociado $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ mapea $L^p(\Omega)$ a $D((-\Delta+1)^\eta)$, donde dicho dominio está inmerso en $L^p(\Omega)$ y existen constantes $C_3 > 0$ y $\lambda_1 > 0$ tales que
$$\|(-\Delta+1)^\eta e^{t(\Delta-1)} z\|_{L^p(\Omega)} \leq C_3 t^{-\eta} e^{-\lambda_1 t}\|z\|_{L^p(\Omega)}.$$

4. Si $p \in [1,\infty)$, entonces existe una constante $\lambda_2 > 0$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $C_4 > 0$ tal que, para todo $z \in C_0^\infty(\Omega)$ $\mathbb{R}^N$-valuado,
$$\|(-\Delta+1)^\eta e^{t\Delta}\nabla\cdot z\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 t^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}} e^{-\lambda_2 t}\|z\|_{L^p(\Omega)},$$
para todo $t > 0$. Además, el operador $(-\Delta+1)^\eta e^{t\Delta}\nabla\cdot$ admite una única extensión a todo $L^p(\Omega)$ la cual es nuevamente denotada por $(-\Delta+1)^\eta e^{t\Delta}\nabla\cdot$ y satisface la desigualdad anterior para cada $z \in L^p(\Omega)$.

Podemos encontrar la demostración del Lema previo en Teorema 1.6.1 de [40] y [52] sección 2.

Lema 2.7.16. Para $q \in (1,\infty)$, consideremos a Δ la realización del Laplaciano en $L^q(\Omega)$ con dominio
$$D(\Delta) = \{w \in W^{2,q}(\Omega) : \ \tfrac{\partial w}{\partial v} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$
Entonces, el operador $-\Delta+1$ es sectorial y posee potencias fraccionarias $(-\Delta+1)^\theta$, $\theta \in (0,1)$, con dominio denso $D((-\Delta+1)^\theta)$. Más aún, si $m \in \{0,1\}$, $p \in [1,\infty]$ y $q \in (1,\infty)$, entonces existe una constante $c_{m,p} > 0$ tal que para todo $w \in D((-\Delta+1)^\theta)$,
$$\|w\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_{m,,p}\|(-\Delta+1)^\theta w\|_{L^p(\Omega)}$$
siempre que $m < 2\theta$ y $m - \frac{N}{p} < 2\theta - \frac{N}{q}$.

Los detalles de la demostración el lector los puede encontrar en [40] página 32 a 40.

Lema 2.7.17. Sean $p \in (1,\infty)$ y $\theta \in (0,1)$. Denotemos por Δ el Laplaciano en $L^p(\Omega)$. Entonces,

1. Existe una constante $C_1 > 0$ tal que, para todo $w \in L^p(\Omega)$ y cualquier $t > 0$, tenemos que

$$\|(-\Delta+1)^{\theta}e^{t\Delta}w\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 t^{-\theta}\|w\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. Existe una constante $C_2 > 0$ tal que, para cada $w \in L^p(\Omega)$ y cualquier $t > 0$,

$$\|(-\Delta+1)^{\theta}e^{t(\Delta-1)}w\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 t^{-\theta}\|w\|_{L^p(\Omega)}.$$

3. Existe unas constantes $C_3 > 0$ y $\nu > 0$ tales que, para cada $z \in (C_0^\infty(\Omega))^N$,

$$\|e^{t\Delta}\nabla\cdot z\|_{L^p(\Omega)} \leq C_3(1+t^{-\frac{1}{2}})e^{-\nu t}\|z\|_{L^p(\Omega)}\ ,\ t>0.$$

   Para todo $t > 0$, el operador $e^{t\Delta}\nabla\cdot$ admite una única extensión en todo $(L^p(\Omega))^N$, la cual nuevamente denotamos por $e^{t\Delta}\nabla\cdot$ y satisface la desigualdad previa para cada $z \in (L^p(\Omega))^N$. En particular, si $0 < t < 1$, entonces para cada $z \in (L^p(\Omega))^N$,

$$\|e^{t\Delta}\nabla\cdot z\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 t^{-\frac{1}{2}}e^{-\nu t}\|z\|_{L^p(\Omega)},$$

   donde $C_4 := 2C_3$.

Las estimativas 1 y 2 se obtienen del Teorema 1.4.3 de [40], la estimativa 3 se obtiene como caso particular del Lema 1.3 de [55].

2.8. Operador de Stokes

En esta subsección presentaremos algunas nociones sobre el operador de Stokes A y algunos resultados preliminares usados en el estudio de nuestro modelo (4-1). Para más detalles recomendamos al lector consultar [25].

2.8.1. Descomposición Hodge y el Proyector de Leray

La divergencia nula de un campo vectorial es particularmente útil para modelar fluidos los cuales tienen un movimiento libre pero su densidad permanece constante, esto es, fluidos incompresibles. Tales campos vectoriales son conocidos como campos vectoriales Solenoidales, incompresibles o de divergencia libre.

En esta subsección vamos a presentar un resultado que caracteriza una clase de funciones de divergencia libre, para ello primero vamos a introducir unas notaciones preliminares.

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y v un vector normal unitario exterior a la superficie $\partial\Omega$. Denotamos el conjunto

$$L^2_\sigma(\Omega) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2):\ u|_{\mathbb{R}^2\setminus\Omega} = 0, (\nabla\cdot u)|_\Omega = 0, (u\cdot v)|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Recordemos que ∇ denota al operador gradiente, $\nabla\cdot$ denota el operador divergencia y definimos el gradiente ortogonal como $\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$.

Teorema 2.8.1. (Teorema de descomposición de Helmholtz-Hodge)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado, simplemente conexo, con dominio Lipschitz. Entonces, el espacio $L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ puede ser escrito como una suma directa. Más precisamente,

$$L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) = \{\nabla\phi : \phi \in H^1(\Omega)\} \oplus \{\nabla^{\perp}\psi : \ \psi \in L^2(\Omega), \ \nabla^{\perp}\psi \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)\}.$$

En particular, si $f \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ es arbitrario, entonces existe un campo escalar $g \in H^1(\Omega)$ y un campo vectorial de divergencia libre $h \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ tal que

$$f = \nabla g + h,$$

satisfaciendo

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} = \|\nabla g\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \|h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.$$

El teorema previo permite definir la Proyección de Leray.

Definición 2.8.2. (Proyección de Leray)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz simplemente conexo. Definimos la Proyección de Leray como la proyección ortonormal $\mathbb{P} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \to L^2_\sigma(\Omega)$ con la propiedad de que para todo $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tenemos que

$$\mathbb{P}f = \mathbb{P}(\nabla g + h) = h,$$

donde $f = \nabla g + h$ es la descomposición de Helmholtz-Hodge de la función f.

Observación 2. Si $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, entonces tenemos que existen funciones g y h tales que $f = \nabla g + h$, en virtud del teorema de la descomposición de Helmholtz-Hodge. Por otro lado, por la prueba de dicho teorema sabemos que g satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta g = \nabla \cdot f.$$

Luego, $g = -\Phi \star \nabla \cdot f$, donde Φ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace. En consecuencia, vemos que

$$f = \mathbb{P}f + \nabla g = \mathbb{P}f - \nabla\Phi \star \nabla \cdot f$$

de lo cual se sigue que

$$\mathbb{P}f = f + \nabla\Phi \star \nabla \cdot f.$$

Definición 2.8.3. Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ siendo un dominio Lipschitz simplemente conexo, definimos al conjunto $\mathscr{V}$ como sigue

$$\mathscr{V} := \{u \in C_c^\infty(\Omega : \mathbb{R}^2) : \ \nabla \cdot u = 0\}.$$

Bajo las hipótesis de la definición previa sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, denotamos al conjunto H como:

$$H = \overline{\mathscr{V}} \text{ en } L^2(\Omega;\mathbb{R}^2).$$

Los autores en [8] (Teorema 1.4, Capítulo 1) mostraron que $H = L^2_\sigma(\Omega)$.

Definición 2.8.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz simplemente conexo, denotamos a V el conjunto definido como

$$V = \overline{\mathscr{V}} \text{ en } H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^2).$$

Por el teorema 1.6, Capítulo 1, en [8] vemos que $V = H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap L^2_\sigma(\Omega)$.

Lema 2.8.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un dominio y sea $f = f_0 + \nabla p$ la descomposición de Helmholtz de $f \in L^2(\Omega)^n$. Entonces la proyección de Helmholtz-Leray es un operador lineal acotado con norma de operador $\|\mathbb{P}\| \leq 1$. Así

$$\|\mathbb{P}f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}, \ f \in L^2(\Omega)^n.$$

$\mathbb{P}$ tiene las siguientes propiedades:

- $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$,
- $(I - \mathbb{P})f = \nabla p$,
- $\mathbb{P}^2 f = \mathbb{P}f$,
- $(I - \mathbb{P})^2 f = (I - \mathbb{P})f$,
- $\langle \mathbb{P}f, g\rangle = \langle f, \mathbb{P}g\rangle$,
- $\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mathbb{P}f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(I - \mathbb{P})f\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Definición 2.8.6. (Operador de Stokes)
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto simplemente conexo con frontera C^2, $D(A) := H^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap V$, $\mathbb{P}$ el Proyector de Leray y $A : D(A) \subseteq H \to H$ el operador definido por

$$A := -\mathbb{P}\Delta.$$

Dicho operador es conocido como el Operador de Stokes.

Observación 3. Los resultados sobre Semigrupos expuestos en la sección previa son aplicables al operador de Stokes. El Semigrupo asociado al operador de Stokes naturalmente es conocido como Semigrupo de Stokes.

Lema 2.8.7. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, es un dominio acotado de clase C^2 y $A : D(A) \to L^2_\sigma(\Omega)$ es el operador de Stokes, entonces

$$D(A) = L^2_\sigma(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega)^n \cap W^{2,2}(\Omega).$$

A continuación presentaremos una serie de resultados particulares del operador de Stokes fraccionario.

2.8.2. Resultados sobre el operador $A^{\frac{1}{2}}$

Lema 2.8.8. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, un dominio y $A : D(A) \to L^2_\sigma(\Omega)$, $D(A) \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$, el operador de Stokes para Ω. Entonces, existe un único operador autoadjunto definido positivo $A^{\frac{1}{2}} : D(A^{\frac{1}{2}}) \to L^2_\sigma$ con dominio $D(A^{\frac{1}{2}}) \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$ satisfaciendo que $D(A) \subseteq D(A^{\frac{1}{2}})$,

$$A^{\frac{1}{2}} D(A) = D(A^{\frac{1}{2}}) \ \text{ y } \ Au = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \ \text{ para todo } u \in D(A).$$

Además, el operador $A^{\frac{1}{2}}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ y

$$\langle A^{\frac{1}{2}u}, A^{\frac{1}{2}} v\rangle = \nu \langle \nabla u, \nabla v\rangle, \ \|A^{\frac{1}{2}} u\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2,$$

   para todo $u, v \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

2. $N(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in D(A^{\frac{1}{2}}) : \ A^{\frac{1}{2}} u = 0\} = \{0\}$ y la inversa $A^{-\frac{1}{2}} := (A^{\frac{1}{2}})^{-1}$ tiene dominio denso $D(A^{-\frac{1}{2}}) = R(A^{\frac{1}{2}}) = \{A^{\frac{1}{2}} u : \ u \in D(A^{\frac{1}{2}})\}$.

3. Si Ω es acotada, entonces $D(A^{-\frac{1}{2}}) = R(A^{\frac{1}{2}}) = L^2_\sigma(\Omega)$ y $A^{-\frac{1}{2}}$ es un operador acotado con la norma del operador

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\| \leq C \nu^{\frac{1}{2}},$$

   donde $C = C(\Omega) > 0$ es la misma constante de la desigualdad de Poincare

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega).$$

2.8.3. Resultados sobre el operador A^α

Lema 2.8.9. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 3$ tenemos la siguiente inmersión:

$$D(A^\alpha) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ con } \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2\alpha}{3}.$$

Más aún, para cada $u \in D(A^\alpha)$ tenemos el siguiente estimativo

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega, 2) \|A^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 2.8.10. Consideremos el operador de Stokes $A : D(A) \to L^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^n)$ y el operador de Laplace $\Delta : D(\Delta) \to L^2(\mathbb{R}^n)^n$ en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$D(A^\alpha) = D((-\Delta)^\alpha) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$$

y

$$A^\alpha u = \nu^\alpha (-\Delta)^\alpha u,$$

para todo $u \in D(A^\alpha)$.

Lema 2.8.11. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, un dominio uniforme de clase C^2, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ y $2 \leq q < \infty$ tales que

$$2\alpha + \frac{n}{q} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Además, consideremos el operador de Stokes A para Ω. Si $u \in D(A^\alpha)$, entonces $u \in W^{1,q}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C(\nu^{-\alpha}\|A^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

donde $C := C(\Omega, \alpha, n) > 0$ es una constante.

Con esta colección de resultados que fueron útiles en el análisis del modelo (4-1) daremos por terminado este capítulo. A continuación introduciremos el modelo y los resultados principales de esta disertación junto con sus demostraciones.

Capítulo 3

Modelo de Quimiotaxis

3.1. Presentación del modelo

En esta sección nos centraremos en demostrar la existencia global, unicidad, acotamiento, regularidad y propiedades de estabilidad sobre el siguiente modelo

$$\begin{cases} (n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ (n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi, \ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_v n_1 = \partial_v n_2 = \partial_v c = 0 \ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ n_1(\cdot, 0)) := n_{1,0}, \ n_2(\cdot, 0)) := n_{2,0}, \ c(\cdot, 0) := c_0, \ u(\cdot, 0) := u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{3-1}$$

El anterior sistema describe la concentración de dos especies que reaccionan a un único fluido quimioatrayente. La solución a este sistema la denotaremos como la tupla de funciones (n_1, n_2, c, u, P) las cuales se encuentran definidas en $\Omega \times [0, \infty)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. En este modelo n_1 y n_2 representan las densidades de las dos especies, c denota la concentración del químico, u representa el campo vectorial de la velocidad del fluido, el cual asumimos incompresible, y la función incógnita P denota la presión del fluido, respectivamente.

Por otro lado, suponemos como conocidos los valores iniciales que tomará la tupla (n_1, n_2, c, u), los cuales por comodidad denotaremos por $(n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0)$. Consideraremos que los datos iniciales presentan la siguiente regularidad para nuestro sistema

$$0 < n_{1,0}, n_{2,0} \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < c_0 \in W^{1,q}(\Omega), \quad \text{y } u_0 \in D(A^\theta),$$

donde $q > 2$ y $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Así mismo, asumiremos como conocidas a la función $\phi \in C^{1+\eta}(\Omega)$ con $\eta > 0$, a las constantes no-negativas χ_1, χ_2, a_1, c_2 y a las constantes positivas μ_1, μ_2, α, β, γ y δ. Estas constantes del modelo corresponden a ciertos ratios que describiremos a continuación. Invocando las tres primeras ecuaciones del sistema (4-1)

$$\begin{aligned}
&(n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2),\\
&(n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2),\\
&c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c.
\end{aligned}$$

Observamos que los términos señalados en azul en la primer y segunda ecuación corresponden a una cinética de tipo Lotka-Volterra. Esto nos indica que las ecuaciones involucradas modelan dos especies compitiendo en base a un mismo estímulo químico, donde μ_1 y μ_2 representan los ratios de crecimiento de cada especie y a_1 y a_2 corresponden a la fuerza de la competencia entre la especie I y la especie II.

Los parámetros χ_1 y χ_2 señalados en rojo, corresponden a sensitividades quimiotácticas las cuales describen cuantitativamente la dispersión y el movimiento dirigido de poblaciones de microorganismos (ver por ejemplo [21] y [22]).

Además, dado que los términos que involucran el Laplaciano (términos de difusión) están acompañados por una constante idéntica a 1, esto nos indicará que el ratio de difusión de las especies y el fluido quimioatrayente es idéntico a 1, un análisis similar se realizó en [23].

En la tercera ecuación tenemos el término señalado en verde, el cual se refiere al transporte del fluído quimioatrayente y el término indicado en naranja, el cual consta de constantes α, β que representan el decaimiento de la señal química, este término es frecuentemente denominado como el término del consumo. De esta ecuación podemos inferir que la evolución de la concentración del fluido quimioatrayente es influenciado por la difusión, el transporte a través del campo vectorial de la velocidad del fluído y el consumo de dicho quimioatrayente, el cual será proporcional a la cantidad de microorganismo existentes en el medio.
Ahora centremos nuestro análisis a la cuarta ecuación de nuestro sistema (4-1), es decir,

$$u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi.$$

Esta ecuación está acompañada por la condición $\nabla \cdot u = 0$ y es básicamente una ecuación diferencial de Navier-Stokes incompresible, la cual describe el movimiento del fluido. Ella contiene un término, señalado en azul, que involucra a la función ϕ la cual nos indica un potencial gravitatorio que influye sobre el fluido, esto corresponde a una fuerza externa a considerar en el modelo. Además, el término señalado en rojo corresponde a la aceleración total de una partícula en el fluido y el término que involucra el Laplaciano nos indica la fricción entre partículas del fluido.

3.2. Teoremas principales

Nuestro principal objetivo a partir de ahora será demostrar rigurosamente dos teoremas, el primero trata sobre la existencia de soluciones clásicas en (4-1) y postula la unicidad y acotamiento de dichas soluciones:

Teorema 3.2.1. (Existencia, unicidad y acotamiento)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera suave y suponga $\chi_1, \chi_2, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ y $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, asumamos que $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0, \phi$ son funciones dadas que satisfacen (4.1) Entonces existen funciones

$$\begin{aligned} n_1, n_2 \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)), \\ c \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)), \\ u \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)), \\ P \in & C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)), \end{aligned}$$

las cuales solucionan el sistema (4-1) de forma clásica. Más aún, el sistema tiene una única solución (n_1, n_2, c, u, P) salvo adición de contantes a P, y existe una constante $C_1 > 0$ tal que para $t > 0$ verifica que

$$\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1.$$

Nuestro segundo teorema nos da unos resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones (4-1) bajo ciertas suposiciones sobre los coeficientes a_1, a_2:

Teorema 3.2.2. (Estabilidad de la solución)
Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, las soluciones del sistema (4-1) tienen las siguientes propiedades:

1. Si $a_1, a_2 \in (0,1)$ entonces

   $$n_1(\cdot,t) \to N_1^*, \quad n_2(\cdot,t) \to N_2^*, \quad c(\cdot,t) \to 0, \quad u(\cdot,t) \to 0 \;\text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } t \to \infty,$$

   donde
   $$N_1^* := \frac{1-a_1}{1-a_1a_2}, \quad N_2^* := \frac{1-a_2}{1-a_1a_2}.$$

2. Suponga que $a_1 \geq 1 > a_2$ entonces

   $$n_1(\cdot,t) \to 0, \quad n_2(\cdot,t) \to 1, \quad c(\cdot,t) \to 0, \quad u(\cdot,t) \to 0 \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } t \to \infty.$$

3.2.1. Síntesis de las pruebas

Para demostrar este par de resultados, seguiremos la siguiente ruta

1. Probaremos que existen ciertas soluciones locales con un método clásico basado en el Teorema del Punto Fijo de Banach.

2. Conseguiremos la regularidad de la solución.

3. Se demostrará por medio de un argumento clásico Bootstrap, que las soluciones son globales o necesariamente no son acotadas.

4. Probaremos la no negatividad y con un argumento del principio del máximo, mostraremos la positividad de las soluciones n_1, n_2, c.

5. Conseguiremos la unicidad de la solución.

6. Se conseguirá el acotamiento de la solución por medio de una serie de lemas, teniendo en cuenta el ítem 2 conseguiríamos la solución global y culminaría el Teorema 4.2.1.

7. Probaremos una serie de lemas que nos permitirán encontrar condiciones para las cuales n_1, n_2 se estabilizan con el tiempo.

8. Demostraremos finalmente que bajo ciertas condiciones c, u se vuelven despreciables con tiempos grandes, con lo cual se finalizaría el Teorema 4.2.3.

Teniendo en cuenta los ítems 1, 2, 3, 4 y 5 procedemos a postular el siguiente lema el cual expresa de manera rigurosa nuestros primeros cinco objetivos.

Lema 3.2.3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}$ un dominio acotado con frontera suave, $\chi_1, \chi_2, a_1, a_2 \geq 0$ y $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ constantes. Para todo $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0, \phi$ que satisfacen (4.1), entonces existen $T_{max} \in (0, \infty]$ y una solución clásica (n_1, n_2, c, n, P) de nuestro modelo (4-1) en $\Omega \times (0, T_{max})$ tal que

$$\begin{aligned}
&n_1, n_2, c, u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}]),\\
&n_1, n_2 > 0, c > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \times (0, T_{max}).
\end{aligned}$$

Además, la solución es única, salvo adición de constantes a P, y $T_{max} = \infty$ o

$$\lim_{t \to T_{max}} (\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}) = \infty,$$

para todo $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$.

3.3. Existencia y regularidad de las soluciones en el modelo

Para demostrar la existencia de las soluciones vamos a usar un razonamiento clásico que involucra el Teorema de Punto Fijo de Banach. A continuación, vamos a especificar cierto espacio de Banach y cierto mapeo que nos permitirá implementar dicha técnica.

3.3.1. Espacio de solución local y mapeo de punto fijo

Vamos a fijar de manera momentánea las constantes $R > 0$ y $T > 0$, las cuales se especificarán más adelante. Considere el espacio

$$X = C^0([0,T); C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)),$$

al cual se le define la norma:

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \|\cdot\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \|\cdot\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} + \|\cdot\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))}.$$

Ahora, definamos la bola cerrada de radio R en X:

$$S = \{(n_1, n_2, c, u) \in X \ : \ \|(n_1, n_2, c, u)\|_X \leq R\}.$$

Motivados por la fórmula de variación de parámetros, vamos a considerar ahora el mapeo sobre S, definido como

$$\Phi(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t) := \begin{pmatrix} \Phi_1(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t) \\ \Phi_2(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t) \\ \Phi_3(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t) \\ \Phi_4(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t\Delta} n_{1,0} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - (u \cdot \nabla n_1 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c))(\cdot, s) ds \\ e^{t\Delta} n_{2,0} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_2 n_2(1 - a_2 n_1 - n_2) - (u \cdot \nabla n_2 + \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c))(\cdot, s) ds \\ e^{t\Delta} c_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u \nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2) c)(\cdot, s) ds \\ e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}((\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi - (u \cdot \nabla) u)(\cdot, s) ds \end{pmatrix},$$

donde $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ y $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ son el Semigrupo del Calor y el Semigrupo de Stokes, respectivamente.

3.3.2. $\Phi(S) \subseteq S$ y Φ es contractiva

Nuestro objetivo actual será demostrar que Φ mapea a S en S para ciertos valores de R y $T > 0$ que especificaremos más adelante. Además, mostraremos que Φ es una función contractiva.

$\Phi(S) \subseteq S$

Notemos que $u \cdot \nabla n_1 = \nabla \cdot (n_1 u)$, entonces observe que $u \cdot \nabla n_1 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) = \nabla \cdot (n_1 u + \chi_1 n_1 \nabla c)$. Denotando por f a la expresión $n_1 u + \chi_1 n_1 \nabla c$ y aplicando la norma de $C^0(\Omega)$, tenemos que Φ es acotado como sigue:

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(n_1, n_2, c, u)(\cdot, t)\|_{C^0(\Omega)}\\
&= \left\| e^{t\Delta} n_{1,0} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s) ds \right\|_{C^0(\Omega)}\\
&\leq \left\| e^{t\Delta} n_{1,0} \right\|_{C^0(\Omega)} + \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s) ds \right\|_{C^0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Recordemos que $\| \cdot \|_{C^0(\Omega)} = \| \cdot \|_{L^\infty(\Omega)}$ para cada elemento en $C^0(\Omega)$. Además,

$$\|e^{t\Delta} n_{1,0}\| \leq \|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} exp\left(\frac{|\xi|^2}{4t}\right) d\xi = \|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ahora, usando la inmersión $D((-\Delta + 1)^{\beta_1}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ para $m = 0$, $p = \infty$, $\beta_1 \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right)$ y $q \in (2, \infty)$ en 2.7.16, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&= \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s)\|_{W^{0,\infty}(\Omega)} ds\\
&\leq c_{0,\infty} \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\beta_1} e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Se toma este valor para β_1 para asegurar que

$$\frac{1}{2} - \beta_1 > 0 \text{ y } -\beta_1 + \frac{1}{2q} + 1 > 0,$$

esto para garantizar que $T^{\frac{1}{2}-\beta_1} \to \infty$ cuando $T \to \infty$, esta observación será de vital importancia más adelante en la elección de R y $T > 0$ con el fin de que Φ mapee a S en S. Utilizando el segundo ítem del Teorema 2.7.17 se llega a:

$$\begin{aligned}
&c_{0,\infty} \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\beta_1} e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds\\
&= c_{0,\infty} \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\beta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds\\
&\leq c_{0,\infty} C_2 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) - \nabla \cdot f)(\cdot, s) \right\|_{L^q(\Omega)} ds\\
&\leq c_{0,\infty} C_2 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2))(\cdot, s) \right\|_{L^q(\Omega)} ds +\\
&+ c_{0,\infty} C_2 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla \cdot f)(\cdot, s) \right\|_{L^q(\Omega)} ds\\
&:= c_{0,\infty} C_2 (I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

Note que la integral I_2 se logra acotar usando el tercer ítem del Teorema 2.7.17 como sigue

$$\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla\cdot f)(\cdot,s)\right\|_{L^q(\Omega)} ds$$
$$\leq C_4 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(\Omega)} ds.$$

Recordemos que $f = n_1 \cdot u + \chi_1 n_1 \nabla c$ y utilizando el Teorema 2.8.9, se sigue que

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|n_1\|_{L^q(\Omega)}(\|u\|_{L^q(\Omega)} + \chi_1\|\nabla c\|_{L^q(\Omega)})$$
$$\leq |\Omega|^{\frac{1}{q}}\|n_1\|_{L^\infty(\Omega)}(C(\Omega,2)\|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + \chi_1\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}),$$

para $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$.
Con lo anterior, podemos asegurar que existe una constante $K_1^1(R) > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^{q_1}(\Omega)} \leq K_1^1(R).$$

En consecuencia, tenemos que

$$C_4 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(\Omega)} ds \leq C_4 K_1^1(R) \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1-\frac{1}{2}} ds$$
$$\leq C_4 K_1^1(R) \frac{2^{\frac{3}{2}+\beta_1}}{1-2\beta_1} T^{\frac{1}{2}-\beta_1}.$$

Ahora, estudiamos la integral I_1. Utilizando el Lema 2.7.17 y el hecho de que $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{0,q}(\Omega)}$, existe un $C_5 > 0$ que solo depende de q tal que

$$\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2))(\cdot,s)\right\|_{L^{q_1}(\Omega)} ds$$
$$\leq C_5 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2))(\cdot,s)\right\|_{L^{q_1}(\Omega)} ds$$
$$\leq C_5 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)\|_{L^q(\Omega)} ds$$
$$\leq C_5 C_6(R) \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1-\frac{1}{2}} ds \leq C_7(R) T^{\frac{1}{2}-\beta_1},$$

para algunos $C_6, C_7 > 0$.
En conclusión tenemos que:

$$\|\Phi_1(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)} \leq \|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)} + K_1(R)T^{\frac{1}{2}-\beta_1},$$

para alguna constante $K_1(R) > 0$.
Procediendo de manera similar para Φ_2, sabemos que existen una constante $K_2(R) > 0$ y $\beta_2 \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right)$ específicos tales que

$$\|\Phi_2(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)} \leq \|n_{2,0}\|_{L^\infty(\Omega)} + K_2(R)T^{\frac{1}{2}-\beta_2}.$$

Ahora, nos concentraremos en acotar Φ_3. Notemos que

$$\begin{aligned}\|\Phi_3(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} &= \left\| e^{t\Delta}c_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)ds \right\|_{W^{1,q}(\Omega)} \\ &\leq \|e^{t\Delta}c_0\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Seleccionamos $q_1, q_2, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \frac{2q}{q(2\gamma-1)+2} < q_1, \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1 \quad , \quad 0 < \delta < 1-\gamma \quad \text{y} \quad \frac{q_1}{\delta q_1 + 1} < q_2 < q.$$

Observe que $q(2\gamma-1)+2 \neq 0$, ya que $\frac{q-2}{2q} < \frac{1}{2} < \gamma$. Además, por el Lema 2.7.15, conseguimos la existencia de constantes $C_{1,q}, C_7, C_8 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}\int_0^t \|(-\Delta+1)^{\gamma}e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{L^{q_1}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma} \|e^{\left(\frac{t-s}{2}\right)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{L^{q_1}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7C_8\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma}\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\delta} \|u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy, la desigualdad de Hölder y la inclusión existente entre los espacios L^p (ver Teorema 2.4.12), conseguimos que existen constantes $R_1, R_2 > 0$ para las cuales se satisface que:

$$\begin{aligned}&\|u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)} \\ &\leq R_1\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^q(\Omega)} + R_1\|\alpha n_1 + \beta n_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|c\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq R_2\|u\|_{D(A^\theta)}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)} + R_2\|\alpha n_1 + \beta n_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que existe una constante $C_9(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&C_{1,q}C_7C_8\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{\gamma}\left(\frac{t-s}{2}\right)^{\delta} \|u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7C_8C_9(R)\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma+\delta} ds \\ &\leq K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1}.\end{aligned}$$

Asimismo, existe una constante $C_{10} > 0$ tal que

$$\|\Phi_3(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq \left\|e^{t\Delta}c_0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)} + K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1} \leq C_{10}\left\|c_0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)} + K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1}.$$

Nuevamente, se observa que dada la elección de $\delta > 0$, tenemos que $T^{-\gamma+\delta+1} \to \infty$ cuando $T \to \infty$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\|A^\theta \Phi_4(n_1,n_2,c,u)\|_{L^2(\Omega)} \leq& \|A^\theta e^{-tA}u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1+\delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u)(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds \\ &:= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Observe que por las propiedades del operador de Stokes y dado que el Semigrupo de Stokes tiene norma de operador idéntica a 1, se sigue que

$$J_1 = \|A^\theta e^{-tA}u_0\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-tA}A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por un lado, definamos $\xi = (\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u$. Dado que el operador $A^\theta e^{-t\theta}$ está acotado por $t^{-\theta}$ bajo la norma de los operadores lineales y como $\|\mathbb{P}\| \leq 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(\xi(\cdot,s))\|_{L^2(\Omega)} &\leq (t-s)^{-\theta}\|\mathbb{P}(\xi(\cdot,s))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (t-s)^{-\theta}\left(\|(\gamma n_1+\delta n_2)\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{3-2}$$

Aquí usamos la siguiente desigualdad $\|(\gamma n_1+\delta n_2)\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(\gamma n_1+\delta n_2)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Por otro lado, si fijamos $n=2$ en el Lema 2.8.3, entonces existirá una constante $C_{11} > 0$ tal que

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq (C_{11}\|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + C_8\|u\|_{L^2(\Omega)})^2.$$

Además, debido a las inclusiones continuas $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$, se garantiza la existencia de una constante $C_{12} > 0$ tal que

$$(C_{11}\|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + C_{11}\|u\|_{L^2(\Omega)})^2 \leq C_{12}\|A^\theta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Luego, por 4-2 y usando la desigualdad previa, conseguimos que

$$\|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(\xi(\cdot,s))\|_{L^2(\Omega)} \leq (t-s)^{-\theta}(\|(\gamma n_1+\delta n_2)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + C_9\|A^\theta u\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Dado que $\phi \in C^{1+\eta}(\overline{\Omega})$, tenemos que $\nabla\phi \in L^\infty(\Omega)$. Así, existe un $K_4(R) > 0$ tal que

$$\int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(\xi(\cdot,s))\|_{L^2(\Omega)}ds \leq K_4(R)T^{1-\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\|A^\theta\Phi_4(n_1,n_2,c,u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)} + K_4(R)T^{1-\theta}.$$

Observe que por hipótesis $\theta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, de modo que $T^{1-\theta} \to \infty$ cuando $T \to \infty$. Ahora, por la Propiedad Arquimediana, existe un $N_R \in \mathbb{N}$ tal que $\max\{K_i : \ i=1,2,3,4\} < N_R$ y

$$\begin{aligned}\|\Phi(n_1,n_2,c,u)\|_X \leq& \|n_{1,0}\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \|n_{2,0}\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + C_{10}\|c_0\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\ &+ \|u_0\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))} + N_R(T^{\frac{1}{2}-\beta_1} + T^{\frac{1}{2}-\beta_2} + T^{-\gamma+\delta+1} + T^{1-\theta}).\end{aligned}$$

De lo anterior, tomando $R > 0$ suficientemente grande, dependiendo de $\|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|n_{2,0}\|_{L^\infty(\Omega)}$, $C_{10}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}$, $\|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)}$, y un $T > 0$ lo suficientemente pequeño conseguiríamos que en efecto $\Phi(S) \subseteq S$.

Φ es contractiva

Ahora vamos a demostrar que Φ es una función contractiva, para ello veamos que existe un $k \in (0,1)$ tal que dados $z_1 := (n_1^1, n_2^1, c^1, u^1)$, $z_2 := (n_1^2, n_2^2, c^2, u^2) \in S$ se verifica que

$$\|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\|_X \leq k\|z_2 - z_1\|_X.$$

Estudiando Φ_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(z_2) - \Phi_1(z_1) \\
&\quad= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1(1 - n_1^1 - a_1 n_2^1) - (u^1 \cdot \nabla n_1^1 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1^1 \nabla c^1)) \\
&\qquad - \mu_1(1 - n_1^2 - a_1 n_2^2) + (u^2 \cdot \nabla n_1^2 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1^2 \nabla c^2)))(\cdot, s) ds \\
&\quad= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s) ds \\
&\qquad \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2) + \nabla \cdot ((n_1^1(u^1 + \chi_1 \nabla c^1)) - (n_1^2(u^2 + \chi_1 \nabla c^2))))(\cdot, s) ds \\
&\qquad := I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Definamos $\overline{f} = a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2) + \nabla \cdot ((n_1^1(u^1 + \chi_1 \nabla c^1)) - (n_1^2(u^2 + \chi_1 \nabla c^2)))$. Analizando I_2 y usando el primer postulado de (2.7.15) con $\eta_1 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$ y $q > 2$, vemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \overline{f}(\cdot, s) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \overline{f}\|_{L^\infty(\Omega)}(\cdot, s) ds \\
&\leq C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{(t-s)\Delta} \overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s) ds \\
&= C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s) ds.
\end{aligned}$$

Empleando los items 1 y 2 del Lema 2.7.15, observamos que existen $C_2, C_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s) ds &\leq C_2 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s) ds \\
&\leq C_3 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta + 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s) ds.
\end{aligned}$$

Notemos que tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$ en 4. del Lema (4.7.1) y utilizando 1. del mismo Lema, podemos concluir que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2))\|_{L^q(\Omega)} \\
&+ \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla\cdot(n_1^1(u^1+\chi_1\nabla c^1)) - (n_1^2(u^2+\chi_1\nabla c^2))\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_4\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&+ \|n_1^1 \underbrace{(u^1+\chi_1\nabla c^1)}_{:=\phi_1} - n_1^2 \underbrace{(u^2+\chi_1\nabla c^2)}_{:=\phi_2}\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3-3}$$

Usando el hecho de que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$ y la naturaleza del conjunto S, garantizamos la existencia de constantes $C_5, C_6(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} &= \|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^1 + n_1^2 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&= \|a_1\mu_1((n_1^1 - n_1^2)n_2^1 + (n_2^1 - n_2^2)n_1^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|n_2^1\|_{L^\infty(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + C_5\|n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq C_6(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + C_6(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|n_1^1\phi_1 - n_1^2\phi_2\|_{L^q(\Omega)} &= \|n_1^1\phi_1 - n_1^1\phi_2 + n_1^1\phi_2 - n_1^2\phi_2\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|n_1^1(\phi_1 - \phi_2) + \phi_2(n_1^1 - n_1^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_6(R)\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^q(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L^q(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|(u^1+\chi_1\nabla c^1) - (u^2+\chi_1\nabla c^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + \chi_1\|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\phi_2\|_{L^q(\Omega)} &= \|u^2 + \chi_1\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|u^2\|_{D(A^\theta)} + \chi_1\|c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)} \\
&\leq C_6(R).
\end{aligned}$$

Así, continuando con la estimativa de (4-3) al emplear las anteriores desigualdades, conseguimos la existencia de una constante $C_7(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} \leq C_7(R)\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} &(\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&+ \|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + \|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $C_8(R) > 0$ verificando

$$\begin{aligned}
C_3\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot,s)ds &\leq C_7(R)\|z_2 - z_1\|_X \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\eta_1} ds \\
&\leq C_7(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|I_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_7(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X. \tag{3-4}$$

Procedamos a analizar I_1. Usando el mismo tratamiento previo tenemos que existen constantes $C_8, C_9, C_{10}, C_{11}(R), C_{12}(R) > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\
&\leq C_8 \int_0^t \|(-\Delta+1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_9 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_9 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \qquad (3\text{-}5) \\
&\leq C_{10} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1-\frac{1}{2}} \|(n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_{11}(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C_{12}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las desigualdades (4-4) y (4-5) y fijando $\eta_1 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$, observamos que

$$\|\Phi_1(z_2) - \Phi_1(z_1)\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \leq C_{13}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X,$$

para algún $C_{13}(R) > 0$.
De manera similar, dada la similitud entre Φ_1 y Φ_2, el anterior razonamiento nos permite encontrar una constante $C_{14}(R) > 0$ tal que

$$\|\Phi_2(z_2) - \Phi_2(z_1)\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \leq C_{14}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_2}\|z_2 - z_1\|_X,$$

para algún $\eta_2 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$.
Ahora, analicemos Φ_3. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_3(z_2) - \Phi_3(z_1) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 + (\alpha n_1^1 + \beta n_2^1)c^1)(\cdot, s) ds \\
&\quad - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^2\nabla c^2 + (\alpha n_1^2 + \beta n_2^2)c^2)(\cdot, s) ds \\
&= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s) ds \\
&\quad \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\underbrace{(\alpha n_1^1 + \beta n_2^1)c^1}_{:=\gamma_1} - \underbrace{(\alpha n_1^2 + \beta n_2^2)c^2}_{:=\gamma_2})(\cdot, s) ds \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Analizando I_1 y usando el mismo razonamiento realizado en (4-5), conseguimos estimar I_1 para algún $\eta_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$ y $\delta \in (0, 1-\eta_3)$ como sigue

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{W^{1,q}(\Omega)} ds \\
\leq & C_{15} \int_0^t \|(-\Delta+1)^{\eta_3} e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
= & C_{15} \int_0^t \|(-\Delta+1)^{\eta_3} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{16} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{17} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3} \|(-\Delta+1)^{\delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{18} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3-\delta} \|(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds.
\end{aligned} \tag{3-6}
$$

Luego, teniendo en cuenta que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$ y la definición del conjunto S, existe una constante $C_{19}(R) > 0$ verificando

$$
\begin{aligned}
\|u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} = & \|u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^1 + u^2\nabla c^1 - u^2\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} \\
\leq & \|(u^1 - u^2)\nabla c^1\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla(c^1 - c^2)u^2\|_{L^q(\Omega)} \\
\leq & C_{19}(R)\|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + C_{19}(R)\|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Usando lo anterior en (4-6), obtenemos que existe $C_{20}(R) > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & C_{20}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|u^1 - u^2\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))} \\
& + C_{20}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3-7}
$$

Similarmente, para I_2 garantizamos la existencia de constantes $C_{21}(R), C_{22} > 0$ que satisfacen

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\
& + C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \\
\leq & C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\
& + C_{22}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \\
& + C_{22}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|n_2^1 - n_2^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3-8}
$$

Por las desigualdades (4-7) y (4-8), podemos tomar una constante $C_{23}(R) > 0$ satisfaciendo

$$
\|\Phi_3(z_2) - \Phi_3(z_1)\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \leq C_{23}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|z_2 - z_1\|_X.
$$

Procederemos a realizar nuestro análisis para Φ_4. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_4(z_2)-\Phi_4(z_1) =& \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1^2+\delta n_2^2)\nabla\phi-(u^2\cdot\nabla)u^2)(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1^1+\delta n_2^1)\nabla\phi-(u^1\cdot\nabla)u^1)(\cdot,s)ds\\
=&\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot\nabla)u^2-(u^1\cdot\nabla)u^1))(\cdot,s)ds\\
=&\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)ds\\
:=&I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Usando en I_2 el mismo razonamiento que se encuentra en (4-2), conseguimos que

$$\begin{aligned}
\|A^\theta I_1\|_{L^2(\Omega)} \leq& \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\leq& \int_0^t (t-s)^{-\theta}\|\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\leq& C_{24}T^{1-\theta}\|n_1^2-n_1^1\|_{C^0([0,T);L^\infty(\Omega))}+C_{24}T^{1-\theta}\|n_2^2-n_2^1\|_{C^0([0,T);L^\infty(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Haciendo uso del Lema 2.8.3 con $n=2$ y teniendo en cuenta que $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)\hookrightarrow D(A^\theta)$, garantizamos la existencia de constantes $C_{25}, C_{26}(R)>0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|A^\theta I_2\|_{L^2(\Omega)} \leq& \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\leq& \int_0^t (t-s)^{-\theta}\|(u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\leq& \int_0^t (t-s)^{-\theta}\|u^2\|_{L^\infty(\Omega)}C_{25}(\|A^\theta(u^2-u^1)\|_{L^2(\Omega)}+\|u^2-u^1\|_{L^2(\Omega)})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t (t-s)^{-\theta}\|u^2-u^1\|_{L^\infty(\Omega)}C_{25}(\|A^\theta u^1\|_{L^2(\Omega)}+\|u^1\|_{L^2(\Omega)})(\cdot,s)ds\\
\leq& C_{26}(R)T^{1-\theta}\|u^1-u^2\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\Phi_4(z_2)-\Phi_4(z_1)\|_{C^0([0,T))}\leq C_{27}(R)T^{1-\theta}\|z_2-z_1\|_X.$$

Finalmente conseguimos que

$$\|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)\|_X\leq \underbrace{(C_{13}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}+C_{14}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}+C_{23}(R)T^{1-\delta-\eta_3}+C_{27}(R)T^{1-\theta})}_{:=k(T)}\|z_2-z_1\|_X.$$

Ahora, observemos que las constantes $C_{13}(R), C_{14}(R), C_{23}(R), C_{27}(R) > 0$ son independientes de T y dependen directamente de R. Entonces, eligiendo R tal que $\Phi(S) \subseteq S$ y tomando $T > 0$ lo suficientemente pequeña (de ser necesario) para que $k(T) \in (0,1)$, conseguimos la contractividad de Φ con $\Phi(S) \subseteq S$. Así, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, podemos garantizar la existencia de un punto fijo $(n_1, n_2, c, u) \in S$, obteniendo así la existencia local de soluciones en nuestro sistema.

3.3.3. Resultados de regularidad

Por otro lado, para garantizar las condiciones de regularidad citadas en el Lema 4.2.3 bastaría con realizar un razonamiento análogo al realizado en [32] usando estimativas estándar de Schauder con las cuales conseguiríamos la existencia de un $\alpha \in (0,1)$ y un $C_{28} > 0$ tales que

$$\begin{aligned} &\|n_1\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} + \|n_2\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} \\ &+ \|c\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} + \|u\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} < C_{27} \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de lo cual se verifica el resultado de regularidad deseado.

3.4. Soluciones globales Vs Soluciones no acotadas

Consideremos los espacios

$$X_0 = C^0\left(\underbrace{\left[0, \frac{3T}{4}\right)}_{I_0}; C^0(\Omega)\times C^0(\Omega)\times W^{1,q}(\Omega)\times D(A^\theta)\right),$$

$$X_1 = C^0\left(\underbrace{\left[\frac{3T}{4}, \frac{3T}{2}\right)}_{I_1}; C^0(\Omega)\times C^0(\Omega)\times W^{1,q}(\Omega)\times D(A^\theta)\right),$$

$$X_2 = C^0\left(\underbrace{\left[\frac{3T}{2}, \frac{9T}{4}\right)}_{I_2}; C^0(\Omega)\times C^0(\Omega)\times W^{1,q}(\Omega)\times D(A^\theta)\right),$$

$$\vdots$$

Observemos que el razonamiento realizado en la Sección 4.3, puede ser aplicado a cada X_n siempre que

$$(n_1, n_2, c, u)(\cdot, z_n) \in C^0(\Omega)\times C^0(\Omega)\times W^{1,q}(\Omega)\times D(A^\theta),$$

siendo z_n el menor número real del intervalo I_n. Luego, podemos elegir $T_{max} \in (0, \infty]$ tal que $(n_1, n_2, c, u) \in S \subseteq X_M$, donde

$$X_M = C^0\left([0, T_{max}); C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)\right).$$

Del anterior análisis tenemos dos posibilidades mutuamente excluyentes:

1. $T_{max} = \infty$, asegurando soluciones globales en el sistema.
2. Existe una discontinuidad de (n_1, n_2, c, u) en T_{max}, de lo cual podemos inferir que

$$\lim_{t \to T_{max}} \left(\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\right) = \infty,$$

para todo $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$.

3.5. Positividad de n_1, n_2 y c

Por la similitud de las ecuaciones 1 y 2 de nuestro sistema (4-1), bastará analizar la positividad de n_1 y se tendrá de manera análoga la positividad de n_2. Para mostrar la positividad de n_1, recordemos que esta función puede dividirse en su parte positiva y parte negativa de la siguiente manera:

$$n_1 = n_1^+ - n_1^-, \qquad \text{donde } n_1^+ := \max\{0, n_1\} \text{ y } n_1^- := -\min\{0, n_1\}.$$

Entonces, es claro que n_1 es no negativa si y solo si $n_1^- = 0$. Para probar que n_1 es positiva, mostraremos primero que ella es no negativa, esto es, $n_1^- = 0$. Para iniciar, observemos que la parte negativa de n_1 satisface la ecuación 1 de nuestro sistema (4-1). Multiplicando esta por n_1^- e integrando esta sobre Ω tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega n_1^-(n_1^-)_t + \int_\Omega n_1^- u \cdot \nabla n_1^- = &\int_\Omega n_1^- \Delta n_1^- - \chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla \cdot (n_1^- \nabla c) \\ &+ \mu_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 (1 - n_1^- - a_1 n_2).\end{aligned} \tag{3-9}$$

Procedemos a analizar cada término de la anterior ecuación. Aplicando integración por partes, usando la igualdad $\nabla \cdot u = 0$ y sabiendo que $u = 0$ en $\partial\Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-) &= \int_\Omega u_1 n_1^-(n_1^-)_x + \int_\Omega u_2 n_1^-(n_1^-)_y \\
&= -\int_\Omega n_1^-(u_1 n_1^-)_x - \int_\Omega n_1^-(u_2 n_1^-)_y \\
&= -\int_\Omega n_1^-((u_1 n_1^-)_x + (u_2 n_1^-)_y) \\
&= -\int_\Omega n_1^-((u_1)_x n_1^- + u_1(n_1^-)_x + (u_2)_y) n_1^- + u_2(n_1^-)_y) \\
&= -\int_\Omega n_1^-(n_1^- \nabla \cdot u + u \cdot \nabla n_1^-) \\
&= -\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-) = 0. \tag{3-10}$$

Usando las fórmulas de Green obtenemos que

$$\int_\Omega n_1^- \Delta n_1^- = -\int_\Omega |\nabla n_1^-|^2. \tag{3-11}$$

Por otro lado, usando integración por partes y la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = \frac{1}{\chi_1}$ se sigue que existe un $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
-\chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla \cdot (n_1^- \nabla c) &= -\chi_1 \int_\Omega n_1^-[(n_1^- c_x)_x + (n_1^- c_y)_y] \\
&= \chi_1 \int_\Omega (n_1^-)_x c_x + (n_1^-)_y c_y n_1^- \\
&= \chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla n_1^- \cdot \nabla c \qquad\qquad (3\text{-}12) \\
&\leq \int_\Omega |\nabla n_1^-|^2 + \frac{\chi_1}{4} \int_\Omega |n_1^- \nabla c|^2 \\
&\leq \int_\Omega |\nabla n_1^-|^2 + C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2.
\end{aligned}$$

Reemplazando (4-10), (4-11), (4-12) en (4-9) y teniendo en cuenta $\frac{d}{dt}(n_1^-)^2 = 2n_1^-(n_1^-)_t$ y $\partial_\nu n_1 = 0$, podemos conseguir un $C_2 > 0$ que satisface

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (n_1^-)^2 &\leq C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 + \mu_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 (1 - n_1^- - a_1 n_2) \\
&\leq C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 + \mu_1 \|1 - n_1^- - a_1 n_2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))} \int_\Omega (n_1^-)^2 \\
&\leq C_2 \int_\Omega (n_1^-)^2.
\end{aligned}$$

despejando conseguimos finalmente que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (n_1^-)^2 \leq 2C_2 \int_\Omega (n_1^-)^2.$$

Ahora, sabemos que $n_1^-(0) = 0$ y aplicando la Desigualdad de Gronwall sobre la anterior expresión, vemos que

$$\int_\Omega (n_1^-)^2 \leq \left(\int_\Omega (n_1^-(0))^2\right) e^{2C_2 t} = 0.$$

Por lo tanto, $n_1^- = 0$ c.t.p., y como n_1^- es continua, concluimos que $n_1^- = 0$ en $\Omega \times [0,T]$ como se quería. Por similitud, $n_2^- = 0$ en $\Omega \times [0,T]$.
Teniendo en cuenta que la parte negativa de la función c satisface la tercer ecuación del sistema (4-1), entonces procedemos a multiplicar por c^- e integrar sobre Ω consiguiendo que

$$\int_\Omega c^-(c^-)_t + \int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- = \int_\Omega c^- \Delta c^- - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)(c^-)^2. \tag{3-13}$$

Haciendo uso de la integración por partes, el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot u = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- &= \int_\Omega u_1 c^-(c^-)_x + \int_\Omega u_2 c^-(c^-)_y \\
&= -\int_\Omega (u_1 c^-)_x c^- - \int_\Omega (u_2 c^-)_y c^- \\
&= -\int_\Omega c^-((u_1 c^-)_x + (u_2 c^-)_y) \\
&= -\int_\Omega c^-((u_1)_x c^- + u_1(c^-)_x + (u_2)_y c^- + u_2(c^-)_y) \\
&= -\int_\Omega c^-(c^- \nabla \cdot u + u \cdot \nabla c^-) \\
&= -\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^-
\end{aligned}$$

De lo cual se concluye que

$$\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- = 0$$

Reemplazando lo anterior en (4-13), teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}(c^-)^2 = 2c^-(c^-)_t$ y usando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (c^-)^2 &= \int_\Omega c^- \Delta c^- - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)(c^-)^2 \\
&\leq -\int_\Omega |\nabla c^-|^2 + \underbrace{\|\alpha n_1 + \beta n_2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))}}_{:=C_3} \int_\Omega (c^-)^2 \\
&\leq C_3 \int_\Omega (c^-)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\frac{d}{dt}(c^-)^2 \leq 2C_3 \int_\Omega (c^-)^2.$$
Aplicando la Desigualdad de Gronwall en la anterior expresión y teniendo en cuenta que $c^-(0) = 0$, tenemos que
$$\int_\Omega (c^-)^2 \leq e^{2tC_3} \int_\Omega (c^-(0)) = 0.$$
Dado que c^- es continua, podemos concluir que $c^- = 0$ y, así, c es una función no negativa en $\Omega \times [0,T]$.
Finalmente, una vez mostrado que las funciones n_1, n_2 y c son no negativas, veremos a continuamos por qué ellas son positivas. Basta demostrar que c es positiva, ya que el razonamiento que se usa puede ser aplicado a las funciones n_1 y n_2. Para comenzar con este análisis, observemos que de la tercera ecuación del sistema (4-1), tenemos que
$$\underbrace{\Delta c - c_t - u \cdot \nabla c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c}_{:=Lc} = 0.$$
Notemos que L es un operador uniformemente parabólico y que $Lc \leq 0$. Definamos $M := \inf_{\Omega\times(0,T]} c$. Como $c \geq 0$, entonces $M \geq 0$. Luego, realizando un razonamiento por casos, concluimos que:

- Si $M > 0$, entonces de inmediato $c \geq M > 0$, cumpliéndose la positividad.
- Si $M = 0$, entonces, partiendo nuevamente por casos,
  1. Si $c > M$ en todo $\Omega \times (0,T]$, entonces $c > 0$.
  2. Si $c = M$ en cierto punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0,T]$, entonces por el principio fuerte del mínimo para operadores parabólicos tendremos que $c = M$ en todo $\Omega \times [0,t_0]$. Por lo tanto, $c_0 = M$, pero $c_0 > 0$ lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $c > 0$.

En conclusión, c es positiva. De forma análoga, n_1 y n_2 son positivas.

3.6. Unicidad de la solución

En esta parte, mostraremos que el sistema en cuestión tiene una única solución a través de un argumento de contradicción. Para ello, sean (n_1, n_2, c, u, P) y $(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{c}, \hat{u}, \hat{P})$ dos soluciones del sistema (4-1), y definamos
$$\begin{aligned} N_1 &:= n_1 - \hat{n}_1, \\ N_2 &:= n_2 - \hat{n}_2, \\ K &:= c - \hat{c}, \\ W &:= u - \hat{u}, \\ R &:= P - \hat{P}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación del sistema (4-1) tenemos que

$$\begin{aligned}(n_1)_t + u\cdot\nabla n_1 &= \Delta n_1 \chi_1 \nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2),\\ (\hat{n}_1)_t + \hat{u}\cdot\nabla \hat{n}_1 &= \Delta \hat{n}_1 \chi_1 \nabla\cdot(\hat{n}_1\nabla \hat{c}) + \mu_1 \hat{n}_1(1-\hat{n}_1-a_1 \hat{n}_2).\end{aligned}$$

Restando las anteriores ecuaciones conseguimos

$$\begin{aligned}(N_1)_t + u\cdot\nabla n_1 - \hat{u}\cdot\nabla\hat{n}_1 =& \Delta(N_1)_t - \chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c - \hat{n}_1\nabla\hat{c})\\ &+ \mu_1[(n_1-\hat{n}_1) - (n_1^2 - \hat{n_1}^2) - a_1(n_1 n_2 - \hat{n}_1\hat{n}_2)].\end{aligned} \tag{3-14}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}u\cdot\nabla n_1 - \hat{u}\cdot\nabla\hat{n}_1 &= u\cdot\nabla n_1 - \hat{u}\cdot\nabla n_1 + \hat{u}\cdot\nabla n_1 - \hat{u}\cdot\nabla\hat{n}_1\\ &= W\cdot\nabla n_1 + \hat{u}\cdot\nabla N_1.\end{aligned} \tag{3-15}$$

Reescribiendo el segundo término al lado derecho de la ecuación (4-14) tenemos que

$$\begin{aligned}\chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c - \hat{n}_1\nabla\hat{c}) &= \chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c - \hat{n}_1\nabla c + \hat{n}_1\nabla c - \hat{n}_1\nabla\hat{c})\\ &= \chi_1\nabla\cdot(N_1\nabla c) + \chi_1\nabla\cdot(\hat{n}_1\nabla K).\end{aligned} \tag{3-16}$$

Analizando el último término al lado derecho de la ecuación (4-14) vemos que

$$\begin{aligned}&\mu_1[(n_1-\hat{n}_1) - (n_1^2 - \hat{n_1}^2) - a_1(n_1 n_2 - \hat{n}_1\hat{n}_2)]\\ &\qquad = \mu_1 N_1 - \mu_1(n_1 N_1 + \hat{n_1} N_1) - a_1(n_1 N_2 + \hat{n}_2 N_1)\\ &\qquad = \mu_1 N_1(1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1\hat{n}_2) - a_1\mu_1 n_1 N_2.\end{aligned} \tag{3-17}$$

Reemplazando (4-15), (4-16) y (4-17) en (4-14), llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned}(N_1)_t + W\cdot\nabla n_1 + \hat{u}\cdot\nabla N_1 =& \Delta N_1 - \chi_1\nabla\cdot(N_1\nabla c) - \chi_1\nabla\cdot(\hat{n}_1\nabla K)\\ &+ \mu_1 N_1(1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1\hat{n}_2) - a_1\mu_1 n_1 N_2.\end{aligned} \tag{3-18}$$

Luego, multiplicamos la ecuación (4-18) por N_1 e integramos sobre Ω para obtener

$$\begin{aligned}\int_\Omega N_1(N_1)_t + \int_\Omega N_1 W\cdot\nabla n_1 + \int_\Omega N_1(\hat{u}\cdot\nabla N_1) =& \int_\Omega N_1\Delta N_1 - \chi_1\int_\Omega N_1\nabla\cdot(N_1\nabla c)\\ - \chi_1\int_\Omega N_1\nabla\cdot(\hat{n}_1\nabla K) + \mu_1\int_\Omega N_1^2(1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1\hat{n}_2) &- a_1\mu_1\int_\Omega N_1 n_1 N_2.\end{aligned} \tag{3-19}$$

A continuación analizaremos algunos términos de la ecuación (4-19). Usando integración por partes y observando que $W = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot W = 0$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega N_1 W \cdot \nabla n_1 &= \int_\Omega N_1[W_1(n_1)_x + W_2(n_1)_y] \\
&= \int_\Omega N_1 W_1(n_1)_x + \int_\Omega N_1 W_2(n_1)_y \\
&= -\int_\Omega (N_1 W_1)_x n_1 - \int_\Omega (N_1 W_2)_y n_1 \\
&= -\int_\Omega n_1 \nabla \cdot (N_1 W) \\
&= -\int_\Omega n_1[\nabla N_1 \cdot W + N_1 \nabla \cdot W] \\
&= -\int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W.
\end{aligned} \tag{3-20}$$

Por otro lado, notemos que al usar integración por partes varios términos de la ecuación (4-19) son reescritos como sigue

$$\int_\Omega N_1(\hat{u} \cdot \nabla N_1) = 0, \tag{3-21}$$

$$\int_\Omega N_1 \Delta N_1 = -\int_\Omega |\nabla N_1|^2, \tag{3-22}$$

$$\int_\Omega \chi_1 N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) = -\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla N_1 \cdot \nabla c, \tag{3-23}$$

$$\int_\Omega \chi_1 N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) = -\chi_1 \int_\Omega \hat{n}_1 \nabla N_1 \cdot \nabla K. \tag{3-24}$$

De (4-23), (4-24) y aplicando la desigualdad de Cauchy, obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) + \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) = \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla N_1 \cdot \nabla c + \hat{n}_1 \nabla N_1 \cdot \nabla K \\
\leq &\chi_1 \left(\frac{1}{8\chi_1} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + 2\chi_1 \int_\Omega |N_1 \nabla c|^2 \right) + \chi_1 \left(\frac{1}{8\chi_1} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + 2\chi_1 \int_\Omega |\hat{n}_1 \nabla K|^2 \right).
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la desigualdad previa y las propiedades de regularidad para c y $\hat{n}_1$, garantizamos la existencia de constantes $C_1, C_2 > 0$ que satisfacen

$$\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) + \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) \leq \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_1 \int_\Omega N_1^2 + C_2 \int_\Omega |\nabla K|^2. \tag{3-25}$$

Por otro lado, observemos que de la regularidad de n_1, $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ existe $C_3 > 0$ verificando

$$\int_\Omega \mu_1 N_1^2(1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2) \leq C_3 \int_\Omega N_1^2. \tag{3-26}$$

Y utilizando la regularidad de n_1 junto con la desigualdad de Young conseguimos una constante $C_4 > 0$ tal que

$$-a_1\mu_1 \int_\Omega n_1 N_1 N_2 \leq a_1\mu_1 \int_\Omega |n_1 N_1 N_2| \leq C_4 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 \right). \tag{3-27}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt} N_1^2 = 2N_1(N_1)_t$ y reemplazando (4-20), (4-21), (4-22), (4-25), (4-26) y (4-27) en (4-19), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega N_1^2 \leq & \int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W - \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_1 \int_\Omega N_1^2 \\ & + C_2 \int_\Omega |\nabla K|^2 + C_3 \int_\Omega N_1^2 + C_4 \int_\Omega N_1^2 + C_4 \int_\Omega N_2^2. \end{aligned} \tag{3-28}$$

Además, notemos que existe $C_5 > 0$ satisfaciendo

$$\int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W \leq \int_\Omega |\nabla N_1||n_1 W| \leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_5 \int_\Omega |W|^2.$$

Entonces, reemplazando lo anterior en (4-28) y despejando tenemos que existe una constante $C_6 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega N_1^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_6 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2 \right). \tag{3-29}$$

Usando un razonamiento similar en la segunda ecuación del sistema (4-1), podemos afirmar que existe $C_7 > 0$ verificando la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega N_2^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_2|^2 + C_7 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2 \right). \tag{3-30}$$

De la tercera ecuación de nuestro sistema (4-1) tenemos que

$$\begin{aligned} c_t + u \cdot \nabla c &= \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c, \\ \hat{c}_t + \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} &= \Delta \hat{c} - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c}. \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones conseguimos

$$K_t + u \cdot \nabla c - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} = \Delta K - ((\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c}). \tag{3-31}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} u \cdot \nabla c - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} &= u \cdot \nabla c - u \cdot \nabla \hat{c} + u \cdot \nabla \hat{c} - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} \\ &= u \cdot \nabla K + \nabla \hat{c} \cdot W. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c} =& (\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha n_1 + \beta n_2)\hat{c} \\ & + (\alpha n_1 + \beta n_2)\hat{c} - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c} \\ =& (\alpha n_1 + \beta n_2)K - \hat{c}(\alpha N_1 + \beta N_2). \end{aligned}$$

Reemplazando las dos últimas igualdades en (4-31) tenemos que

$$K_t + u \cdot \nabla K + \nabla \hat{c} \cdot W = \Delta K - ((\alpha n_1 + \beta n_2)K - (\alpha N_1 + \beta N_2)\hat{c}). \tag{3-32}$$

Multiplicando por K e integrando sobre Ω vemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega K K_t + \int_\Omega K(u \cdot \nabla K) + \int_\Omega K \nabla \hat{c} \cdot W = \int_\Omega K \Delta K - \int_\Omega ((\alpha n_1 + \beta n_2)K^2 \\ - \int_\Omega K(\alpha N_1 + \beta N_2)\hat{c}).\end{aligned} \tag{3-33}$$

Usando razonamientos análogos a los expuestos en el estudio de la primera ecuación del sistema (4-1) notamos que existen constantes $C_8, C_9 > 0$ tales que

- $\int_\Omega K u \cdot \nabla K = 0,$
- $\int_\Omega K W \cdot \nabla \hat{c} = -\int_\Omega \hat{c} W \cdot \nabla K,$
- $\int_\Omega K \Delta K = -\int_\Omega |\nabla K|^2,$
- $-\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)K^2 \leq \int_\Omega |(\alpha n_1 + \beta n_2)K^2| \leq C_8 \int_\Omega K^2,$
- $\int_\Omega (\alpha N_1 + \beta N_2)K\hat{c} = \alpha \int_\Omega \hat{c} N_1 K + \beta \int_\Omega \hat{c} N_2 K \leq C_9 \int_\Omega |N_1 K| + C_9 \int_\Omega |N_2 K|.$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega K^2 \leq \int_\Omega \hat{c} W \cdot \nabla K - \int_\Omega |\nabla K|^2 + C_8 \int_\Omega K^2 + C_9 \int_\Omega |N_1 K| + C_9 \int_\Omega |N_2 K|. \tag{3-34}$$

Además, podemos acotar el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior como sigue

$$\int_\Omega \hat{c} W \cdot \nabla K \leq \int_\Omega |\hat{c} W||\nabla K| \leq C_{10} \int_\Omega |W|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla K|^2,$$

para alguna constante $C_{10} > 0$. Usando la desigualdad de Young en (4-34), reemplazando lo anterior y despejando conseguimos una constante $C_{11} > 0$ que satisface la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega K^2 \leq -\int_\Omega |\nabla K|^2 + C_{11}\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2\right). \tag{3-35}$$

Ahora, de la cuarta ecuación del sistema (4-1) tenemos que

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u &= \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla \phi \\ \hat{u}_t + (\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u} &= \Delta \hat{u} + \nabla \hat{P} + (\gamma \hat{n}_1 + \delta \hat{n}_2)\nabla \phi. \end{aligned}$$

Restando las anteriores ecuaciones obtenemos la igualdad

$$W_t + (u \cdot \nabla)u - (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) = \Delta W + \nabla R + (\gamma N_1 + \delta N_2)\nabla\phi. \tag{3-36}$$

Analizando los dos últimos términos de la izquierda de la ecuación (4-36) vemos que

$$\begin{aligned}(u \cdot \nabla)u - (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) &= (u_1 D_1 + u_2 D_2)u - (\hat{u}_1 D_1 + \hat{u}_2 D_2)u \\ &= (u_1 D_1 - \hat{u}_1 D_1 u) + (u_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 \hat{u}) \\ &= (u_1 D_1 u - \hat{u}_1 D_1 u + \hat{u}_1 D_1 u - \hat{u}_1 D_1 \hat{u}) \\ &\quad + (u_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 u + \hat{u}_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 \hat{u}) \\ &= (W \cdot \nabla)u + (\hat{u} \cdot \nabla)W.\end{aligned}$$

Aplicando $W\cdot$ a la ecuación (4-36) e integrando sobre Ω obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\int_\Omega W \cdot W_t + \int_\Omega W \cdot (u \cdot \nabla)u - \int_\Omega W \cdot (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) &= \int_\Omega W \cdot \Delta W + \int_\Omega W \cdot \nabla R \\ &\quad + \int_\Omega W \cdot (\gamma N_1 + \delta N_2)\nabla\phi.\end{aligned} \tag{3-37}$$

Observemos que usando integración por partes y teniendo en cuenta que $W = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot W = 0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_\Omega W \cdot (W \cdot \nabla)u &= \int_\Omega W \cdot (W_1 D_1 u + W_2 D_2 u) \\ &= \int_\Omega W_1 W \cdot D_1 u + \int_\Omega W_2 W \cdot D_2 u \\ &= \int_\Omega W_1(W_1(u_1)_x + W_2(u_2)_x) + \int_\Omega W_2(W_1(u_1)_y + W_2(u_2)_y) \\ &= -\int_\Omega (W_1^2)_x u_1 + (W_1 W_2)_x u_2 + (W_2 W_1)_y u_1 + (W_2^2) u_2 \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} (W_1^2)_x + (W_2 W_1)_y \\ (W_1 W_2)_x + (W_2^2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} W_1(W_1)_x + W_1((W_1)_x + (W_2)_y) + W_2(W_1)_y \\ W_1(W_2)_x + W_2((W_1)_x + (W_2)_y) + W_2(W_2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} W_1(W_1)_x + W_2(W_1)_y \\ W_1(W_2)_x + W_2(W_2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot (\nabla W \cdot W).\end{aligned} \tag{3-38}$$

Utilizando un razonamiento similar al previo, notamos que

$$\int_\Omega W \cdot (\hat{u} \cdot \nabla)W = -\int_\Omega W \cdot (\nabla W \cdot \hat{u}). \tag{3-39}$$

Por las fórmulas de Green tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega W\cdot\Delta W &= \int_\Omega W_1\cdot\Delta W_1 + W_2\Delta W_2\\ &= -\int_\Omega |\nabla W_1|^2 - \int_\Omega |\nabla W_2|^2\\ &= -\int_\Omega |\nabla W|^2.\end{aligned} \tag{3-40}$$

Haciendo uso de la integración por partes, observamos que

$$\int_\Omega W\cdot\nabla R = \int_\Omega W_1 R_x + \int_\Omega W_2 R_y = -\int_\Omega R\nabla\cdot W = 0. \tag{3-41}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega W\cdot\underbrace{(\gamma N_1+\delta N_2)}_{:=N^*}\nabla\phi &= \int_\Omega N^*(W_1\phi_x + W_2\phi_y)\\ &= -\int_\Omega ((N^*W_1)_x + (N^*W_2)_y)\phi\\ &= -\int_\Omega (N^*_x W_1 + N^*(W_1)_x + N^*_y W_2 + N^*(W_2)_y)\phi\\ &= -\int_\Omega (N^*((W_1)_x + (W_2)_y) + W\cdot\nabla N^*)\phi\\ &= -\int_\Omega W\cdot\nabla N^*\phi\\ &= -\int_\Omega \gamma\phi W\cdot\nabla N_1 - \int_\Omega \delta\phi W\cdot\nabla N_1\end{aligned} \tag{3-42}$$

Reemplazando (4-38), (4-39), (4-40), (4-41) y (4-42) en (4-36), llegamos a la desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |W|^2 \leq \int_\Omega & W\cdot(\nabla W\cdot\hat{u}) + \int_\Omega u\cdot(\nabla W\cdot W)\\ &-\int_\Omega |\nabla W|^2 - \int_\Omega \gamma\phi W\cdot\nabla N_1 - \int_\Omega \delta\phi W\cdot\nabla N_1.\end{aligned} \tag{3-43}$$

Observamos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Cauchy con ε, existe una constante $C_{12} > 0$ satisfaciendo la desigualdad

$$\int_\Omega W\cdot(\nabla W\cdot\hat{u}) \leq \int_\Omega |W||\nabla W||\hat{u}| \leq C_{12}\int_\Omega |W|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla W|^2.$$

Así, por un razonamiento similar al previo y por la desigualdad de Young aplicada en (4-43), conseguimos una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |W|^2 \leq -\int_\Omega |\nabla W|^2 + C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \int_\Omega |\nabla N_2|^2 + \int_\Omega |W|^2\right). \tag{3-44}$$

En resumen, recopilando las desigualdades (4-29), (4-30), (4-35) y (4-44), sabemos que existen constantes $C_6, C_7, C_{11}, C_{13} > 0$ tales que

1. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega N_1^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_6\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2\right),$

2. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega N_2^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_2|^2 + C_7\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2\right),$

3. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega K^2 \leq -\int_\Omega |\nabla K|^2 + C_{11}\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2\right),$

4. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega |W|^2 \leq C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \int_\Omega |\nabla N_2|^2 + \int_\Omega |W|^2\right).$

Ahora, definimos

$$y(t) := \int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2.$$

Entonces, a partir de las desigualdades listadas anteriormente, podemos inferir la existencia de una constante $C_{14} > 0$ tal que

$$y'(t) \leq C_{14} y(t).$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall y usando el hecho de que $N_1(0), N_2(0), K(0), W(0) = 0$, concluimos que $N_1 = N_2 = K = W = 0$. Esto último demuestra la unicidad de las componentes n_1, n_2, c y u de la solución al sistema (4-1). Además, por la cuarta ecuación del sistema (4-1) y la unicidad de las componentes n_1, n_2, c y u, vemos que $\nabla P = \nabla \hat{P}$. De lo anterior, concluimos que, exceptuando suma con constantes, P es único.

3.7. Acotamiento

Vamos a demostrar el Teorema 4.2.1, para ello vamos a probar algunos lemas previos :

Lema 3.7.1. Existen constantes $C_7 > 0$ y $C_8 > 0$ tales que la solución de 4-1 satisface que:

$$\int_\Omega n_i(\cdot, t) \leq C_7 \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega n_i^2 \leq C_8 \text{ para todo } t \in (0, T_{max} - \tau),$$

para $i = 1, 2$, donde $\tau := \text{mín}\{1, \frac{1}{6} T_{max}\}$.

Demostración:

Observemos que por las fórmulas de Green:

$$\int_\Omega \Delta n_1 = \int_{\partial\Omega} \partial_v n_1 dS = 0,$$

ya que, por nuestros valores iniciales, $\partial_v n_1 = 0$.
Por otro lado, aplicando integración por partes, usando $\nabla \cdot u = 0$ y teniendo en cuenta que n_1 se anula en $\partial\Omega$, conseguimos la igualdad

$$\int_\Omega u \cdot \nabla n_1 = -\int_\Omega n_1 \nabla \cdot u = 0.$$

Además, utilizando nuevamente las fórmulas de Green y teniendo en cuenta que, por las condiciones iniciales $\partial_v n_1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla \cdot (n_1 \nabla c) &= \int_\Omega (n_1)_{x_1} c_{x_1} + n1 c_{x_1 x_1} + (n_1)_{x_2} c_{x_2} + n_1 c_{x_2 x_2} \\ &= \int_\Omega \nabla n_1 \cdot \nabla c + \int_\Omega n_1 \Delta c \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_v n_1 c \; dS = 0.\end{aligned}$$

Observemos que de la primera ecuación de nuestro sistema 4-1, tenemos que:

$$\frac{d}{dt} n_1 + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) \text{ en } (0, T_{max}].$$

Integrando la anterior expresión conseguimos que

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega n_1 = \int_\Omega \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) = \mu_1 \int_\Omega n_1 - \mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \mu_1 a_1 \int_\Omega n_1 n_2 \tag{3-45}$$

para cada $t \in (0, T_{max})$. Ahora, recordando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos

$$\begin{aligned}| \langle 1, n_1 \rangle | \leq \|1\|_{L^2(\Omega)} \|n_2\|_{L^2(\Omega)} &\Leftrightarrow \int_\Omega n_1 \leq \left(\int_\Omega 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega n_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \left(\int_\Omega n_1 \right)^2 \leq \left(\int_\Omega 1^2 \right) \left(\int_\Omega n_1^2 \right) = |\Omega| \int_\Omega n_1^2.\end{aligned}$$

De la última desigualdad, podemos ver que

$$\frac{1}{|\Omega|} \left(\int_\Omega n_1 \right)^2 \leq \int_\Omega n_1^2.$$

Además, como n_1, n_2 son positivas, llegamos a que $\int_\Omega n_1 n_2 \geq 0$, para cada $t \in (0, T_{max})$.

Definamos ahora la función $y(t) := \int_\Omega n_1(\cdot, t)$ y notemos que de 4-45:

$$y'(t) = \mu_1 y(t) - \mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \mu_1 a_1 \int_\Omega n_1 n_2 \leq \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2$$

De lo que se concluye que $y'(t) \leq \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2$.

Sea $g(t) = \text{máx} \left\{ \int_\Omega n_{1,0}, |\Omega| \right\}$, razonando por casos y usando el criterio de comparación de EDO expuesto en el Lema 2.6.9 se sigue que

1. Si $g(t) = |\Omega|$, claramente $g'(t) = 0$. Para cada $t \geq 0$, definamos la función
$$\phi_1(y(t), t) = \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y^2(t).$$
Observar que $\phi_1(g(t), t) = 0 = g'(t)$.
Como estamos asumiendo que $g(t) = |\Omega|$, entonces se tiene que $y(0) \leq g(0)$ y, así, $y(t) \leq g(t)$, para cada $t \geq 0$.

2. Si $g(t) = \int_\Omega n_{1,0}$, defina la constante $c := \mu_1 \left(\int_\Omega n_{1,0} \right) \left(1 - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega n_{1,0} \right)$ y
$$\phi_2(y(t), t) := \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2 - c.$$
Como se está asumiendo que $\int_\Omega n_{1,0} \geq |\Omega|$, entonces $c \leq 0$ y, por lo tanto, $-ct \geq 0$, para cada $t \geq 0$. Notemos que
$$\begin{aligned}(y(t) - ct)' &= y'(t) - c \\ &\leq \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2 - c \\ &\leq \mu_1 (y(t) - ct) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} (y(t) - ct)^2 - c \\ &= \phi(y(t) - ct, t).\end{aligned}$$
Por la hipótesis de este subcaso, se tiene que $g(0) = |\Omega| \geq \int_\Omega n_{1,0} = y(0) - c \cdot 0$. De ahí, concluimos que $y(t) \leq y(t) - ct \leq g(t)$.

De esta manera, mostramos que, para cada $t \geq 0$, tenemos la siguiente desigualdad
$$y(t) \leq \max \left\{ \int_\Omega n_{1,0}, |\Omega| \right\}.$$
Observar que $n_{1,0} \in C(\overline{\Omega})$ y Ω es un conjunto acotado, entonces por el Teorema de Heine-Borel tenemos que $n_{1,0}$ es una función acotada.
Ahora, observemos que de la igualdad (4-45) tenemos la desigualdad
$$\int_\Omega n_1^2 \leq \int_\Omega n_1(\cdot, t) - \frac{1}{\mu_1} \frac{d}{dt} \int_\Omega n(\cdot, t).$$
Ahora fije $\tau = \min\{1, \frac{1}{6} T_{max}\}$, tome $t \in (0, T_{max} - \tau)$, y tenga en cuenta que existe un $C_7 > 0$ tal que acota a $\int_\Omega n_1(\cdot, t)$ en $t \in (0, T_{max})$ por lo demostrado previamente, notemos que:
$$\begin{aligned}\int_t^{t+\tau} \int_\Omega n_1^2 &\leq \int_t^{t+\tau} \int_\Omega n_1(\cdot, t) - \frac{1}{\mu_1} \int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} \int_\Omega n_1(\cdot, t) \\ &\leq C_7 \tau - \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega n_1(\cdot, t + \tau) + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega n_1(\cdot, t) \leq C_7(\tau + 1),\end{aligned}$$

con lo cual se conseguiría la última desigualdad. Para el caso n_2 se hace un razonamiento análogo. ■

Lema 3.7.2. Existe una constante $C_9 > 0$ tal que

$$\|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_9$$

, para todo $t \in (0, T_{max})$. Además, el mapeo $t \mapsto \|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es no creciente en $(0, \infty)$. Más aún, existe una constante $C_{10} > 0$ tal que

$$\int_0^{T_{max}} \int_\Omega |\nabla c|^2 \leq C_{10}.$$

Demostración:

Observemos que de nuestro modelo (4-1) en la ecuación 3 tenemos que:

$$c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c.$$

Tome $p > 1$, multiplicando la anterior ecuación por c^{p-1} e integrando sobre Ω, conseguimos la siguiente igualdad

$$\int_\Omega c^{p-1} c_t + \int_\Omega c^{p-1} u \cdot \nabla c = \int_\Omega c^{p-1} \Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) c^p.$$

Notemos que $\frac{d}{dt} c^p = p c^{p-1} c_t$, luego $c^{p-1} c_t = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} c^p$ y, así, reemplazando en la anterior igualdad llegamos a

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_\Omega c^p = -\int_\Omega c^{p-1} u \cdot \nabla c + \int_\Omega c^{p-1} \Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) c^p. \tag{3-46}$$

Estimemos la primera integral del lado derecho de la anterior igualdad. Para ello, notemos que

$$\int_\Omega c^{p-1} u \cdot \nabla c = \int_\Omega c^{p-1} u_1 c_x + \int_\Omega c^{p-1} u_2 c_y := I_1 + I_2.$$

Usando integración por partes y el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$, reescribimos I_1 e I_2 como sigue

$$I_1 = -\tfrac{1}{p} \int_\Omega c^p (u_1)_x \text{ y } I_2 = -\tfrac{1}{p} \int_\Omega c^p (u_2)_y.$$

Entonces, $I_1 + I_2 = -\frac{1}{p} \int_\Omega c^p \nabla \cdot u$ y así, reemplazando en 4-46 obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_\Omega c^p = \int_\Omega c^p \nabla \cdot u + \int_\Omega c^{p-1} \Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) c^p. \tag{3-47}$$

De la anterior ecuación, vamos a analizar la expresión $\int_\Omega c^{p-1} \Delta c$. En detalle, esta expresión, podemos escribirla como sigue

$$\int_\Omega c^{p-1}\Delta c = \int_\Omega c^{p-1}(c_x)_x + \int_\Omega c^{p-1}(c_y)_y.$$

Usando integración por partes podemos concluir que

$$\int_\Omega c^{p-1}(c_x)_x = -\int_\Omega c_x(c^{p-1})_x + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_x v_1 dS,$$
$$\int_\Omega c^{p-1}(c_y)_y = -\int_\Omega c_y(c^{p-1})_y + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_y v_2 dS.$$

Haciendo uso de la definición de derivada exterior, vemos que $v{\cdot}Dc = \partial_v c$ y, por las condiciones del problema, sabemos que $\partial_v c = 0$ en $\partial\Omega$, para todo $t > 0$. Por lo tanto,

$$\int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_x v_1 dS + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_y v_2 dS = \int_{\partial\Omega} c^{p-1} v\cdot Dc\ dS = \int_{\partial\Omega} c^{p-1}\partial_v c\ dS = 0.$$

En conclusión,

$$\int_\Omega c^{p-1}\Delta c = -\int_\Omega c_x(c^{p-1})_x - \int_\Omega c_y(c^{p-1})_y = -(p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2.$$

Reemplazando en 4-47 la anterior igualdad conseguimos que:

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p = \frac{1}{p}\int_\Omega c^p\nabla\cdot u - (p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2 - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^p.$$

Teniendo en cuenta que $\nabla\cdot u = 0$ en Ω, para todo $t > 0$, que α y β son constantes positivas y que n_1, n_2 y c son funciones positivas, tenemos que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p \le -(p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2 \le 0.$$

Con lo cual se concluye que la función $t \to \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es un mapeo decreciente, luego para cada $t_2 \ge t_1 \ge 0$ se tiene que $\|c(\cdot,t_2)\|_{L^p(\Omega)} \le \|c(\cdot,t_1)\|_{L^p(\Omega)}$. Así, para cada $t > 0$, obtenemos que

$$\|c(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le \|c_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} := C_9.$$

Al ser p arbitrario, conseguiríamos (4.7.2).
Por otro lado, observemos que si tomamos $p = 2$ en (4.7) conseguiríamos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^2 \le -\int_\Omega |\nabla c|^2.$$

Integrando sobre $(0,t)$ en la anterior desigualdad y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |\nabla c|^2 &\le \frac{1}{2}\left(\int_\Omega c_0^2 - c^2(\cdot,t)\right)\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega c_0^2.\end{aligned}$$

Dado que $t \in (0,T_{max})$ fue arbitrario, (4.7.2) es verdadera como queríamos. ■

Lema 3.7.3. Existe una constante $C_{11} > 0$ satisfaciendo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{11}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Además, para todo $t \in (0, T_{max} - \tau)$,

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{11} \text{ y } \int_t^{t+\tau} \int_\Omega |u|^4 \leq C_{11},$$

donde $\tau = \text{mín}\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$.

Demostración:

Tomando $n = \gamma n_1 + \delta n_2$ y $g = 0$, observamos que al multiplicar por u e integrar toda la ecuación 4 de 4-1, obtenemos que el término $\int_\Omega u \cdot \nabla P$ se anula. En efecto, usando integración por partes, el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot u = 0$, tenemos que $\int_\Omega u \cdot \nabla P = -\int_\Omega P \nabla \cdot u = 0$. Por lo anterior, podemos usar el mismo razonamiento que se encuentra en el Lema 3.4 de [9] para obtener la existencia de constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que, para $y(t) = \int_\Omega |u(\cdot,t)|^2$ con $t \in [0, T_{max})$, verifican

$$y'(t) + \int_\Omega |\nabla u|^2 + C_1 y(t) \leq h(t), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}),$$

donde

$$h(t) := C_2 \int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, t).$$

Por otro lado, podemos ver

$$\begin{aligned}
(\gamma^2 n_2 - \delta^2 n_1)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \gamma^2 n_2^2 + \delta^2 n_1^2 \geq 2\gamma\delta n_1 n_2 \\
&\Leftrightarrow \gamma^2 n_1^2 + \gamma^2 n_2^2 + \delta^2 n_1^2 + \delta^2 n_2^2 \geq \gamma^2 + 2\gamma\delta n_1 n_2 + \delta^2 n_2^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2) n_1^2 + (\gamma^2 + \delta^2) n_2^2 \geq (\gamma n_1 + \delta n_2)^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2)(n_1^2 + n_2^2) \geq (\gamma n_1 + \delta n_2)^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$h(t) \leq C_2 \int_\Omega (\gamma^2 + \delta^2)(n_1^2 + n_2^2) \leq C_2(\gamma^2 + \delta^2) \left(\int_\Omega n_1^2(\cdot,t) + \int_\Omega n_1^2(\cdot,t) \right).$$

Por el Lema 4.7.1, existe $C_8 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} h(s) ds \leq C_2(\gamma^2 + \delta^2)(C_8 + C_8) = C_3 \ .$$

Usando el Lema 2.6.11, conseguimos que, para cada $t \in (0, T_{max})$,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} = y(t) \leq \text{máx} \left\{ \int_\Omega |u_0|^2 + C3, \frac{C_2}{C_1 \tau} + 2C_3, \right\}$$

consiguiéndose así la primera parte de nuestro lema.
Ahora, vamos a demostrar la segunda parte de este lema. Para ello, observemos que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos la siguiente igualdad

$$\int_t^{t+\tau} y'(s)ds = y(t+\tau) - y(t), \text{ donde } \tau = \text{mín}\{1, \tfrac{1}{6}T_{max}\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} -y(t) + \int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \int_t^{t+\tau} y'(t) + \int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 + C_1\int_t^{t+\tau} y(s)ds \\ &\leq \int_t^{t+\tau} h(s)ds \\ &= C_2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s)ds. \end{aligned}$$

De ahí que obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq y(t) + C_2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s)ds.$$

Observemos que, para cada $s \in (t, t+\tau)$,

$$\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s) = \gamma^2\int_\Omega n_1^2(\cdot, s) + \delta^2\int_\Omega n_2^2(\cdot, s) + 2\gamma\delta\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s).$$

Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s) \leq \left(\int_\Omega n_1^2(\cdot, s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_2^2(\cdot, s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos por (4.7.1) y por la primera parte de este lema que existen constantes $C_8, C_{11} > 0$ tales que, para cada $t \in (0, T_{max} - \tau)$,

$$\gamma^2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_1^2(\cdot, s) + \delta^2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_2^2(\cdot, s) + 2\gamma\delta\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s) \leq \gamma^2 C_8 + \delta^2 C_8 + \gamma\delta C_8$$

y

$$y(t) = \int_\Omega |u(\cdot, t)|^2 \leq C_{11}^2.$$

Por lo anterior, conseguiríamos que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{11}^2 + C_2(\gamma^2 C_8 + \delta^2 C_8 + \gamma\delta C_8),$$

con lo cual tendríamos la segunda desigualdad de nuestro lema.

Ahora, vamos a demostrar la última desigualdad. Por la fórmula de interpolación de Gagliardo-Nirenberg, tenemos que existe un $C_4 > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega |u(\cdot,t)|^4\right)^{\frac{1}{4}} = \|u(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)} \le C_4\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,

$$\int_\Omega |u(\cdot,t)|^4 \le C_4\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Notemos que por todo lo anteriormente demostrado, para cada $t\in(0,T_{max})$ podemos acotar $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2$. Por lo tanto, existe una constante $C_5>0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |u(\cdot,s)|^4 ds \le C_5, \quad \forall t\in(0,T_{max}-\tau).$$

■

Lema 3.7.4. Existe una constante $C_{12}>0$ tal que

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C_{12}, \text{ para todo } t\in(0,T_{max}).$$

Demostración:

Primero, observemos que $\nabla\cdot u_t = (u_t)_x + (u_t)_y = [u_x+u_y]_t = (\nabla\cdot u)_t = 0$, lo cual implica de manera directa que $\mathbb{P}(u_t)=u_t$, y recordemos que, por la definición del operador de Stokes, $\mathbb{P}(\Delta u) = -Au$. Además, por el Lema 2.8.5, tenemos que $\mathbb{P}(\nabla P)=0$. Entonces, teniendo en cuenta todas las igualdades previas, aplicando el Proyector de Leray en la cuarta ecuación de (4-1) y multiplicando lo resultante por Au, obtenemos

$$(Au)u_t + (Au)^2 = -\mathbb{P}((u\cdot\nabla)u)Au + (\gamma\mathbb{P}(n_1\nabla\phi)Au + \delta\mathbb{P}(n_2\nabla\phi))Au.$$

Por el primer postulado del Lema 2.8.8, por el Lema 2.8.10, usando integración por partes, teniendo en cuenta que el coeficiente de viscosidad es $\nu=1$ y que $u=0$ en $\partial\Omega$, conseguimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\|(u_1)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_1)_y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_2)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_2)_y\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)\\ &= 2\int_\Omega((u_1)_x[(u_1)_t]_x + (u_1)_y[(u_1)_t]_y + (u_2)_x[(u_2)_t]_x + (u_2)_y[(u_2)_t]_y)\\ &= -2\int_\Omega (u_1)_{xx}(u_1)_t + (u_1)_{yy}(u_1)_t + (u_2)_{xx}(u_2)_t + (u_2)_{yy}(u_2)_t\\ &= \int_\Omega(-\Delta)u_t = \int_\Omega (Au)u_t.\end{aligned}$$

Luego, integrando en 4.7, teniendo en cuenta que el proyector de Helmholtz-Leray es acotado por el Lema 2.8.5 y usando la desigualdad de Hölder, observamos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}u|^2 + \int_\Omega |Au|^2 \\
&= -\int_\Omega \mathbb{P}((u\cdot\nabla)u)Au + \gamma\int_\Omega P(n_1\nabla\phi)Au + \delta\int_\Omega \mathbb{P}(n_2\nabla\phi)Au \\
&\leq \int_\Omega \left|[\sqrt{2}(u\cdot\nabla)u]\frac{Au}{\sqrt{2}}\right| + \left(\gamma\int_\Omega \left|(\sqrt{2\gamma}n_1\nabla\phi)\frac{Au}{\sqrt{2\gamma}}\right| + \delta\int_\Omega \left|(\sqrt{2\delta}n_2\nabla\phi)\frac{Au}{\sqrt{2\delta}}\right|\right) \\
&\leq \frac{3}{4}\int_\Omega |Au|^2 + \int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 + \gamma^2\int_\Omega |n_1\nabla\phi|^2 + \delta^2\int_\Omega |n_2\nabla\phi|^2 \\
&\leq \frac{3}{4}\int_\Omega |Au|^2 + \int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 + \|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left(\gamma^2\int_\Omega |n_1|^2 + \delta^2\int_\Omega |n_2|^2\right).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, (4.7.3) y la desigualdad de Hölder, tenemos que existen constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ y $C_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 &\leq \int_\Omega \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u|^2 \\
&= \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1\|Au\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_2\|Au\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_\Omega \frac{1}{2}|Au|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[C_2\left(2\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |Au|^2 + C_3\int_\Omega |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Como $\phi \in C^{1+\eta}$, entonces existe un $K > 0$ tal que $\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{C^{1+\eta}(\Omega)} \leq K$. Así, por el Lema 2.8.8, teniendo en cuenta las desigualdades previas y por (4.7), notamos que para cada $t \in (0, T_{max})$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_3\int_\Omega |\nabla u|^2 + C_3\left[\gamma^2\int_\Omega n_1^2 + \delta^2\int_\Omega n_2^2\right].$$

Definamos $h_1(t) := C_3\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2$ y $h_2(t) = C_3\left[\gamma^2\int_\Omega n_1^2 + \delta^2\int_\Omega n_2^2\right]$. Por el Lema 4.7.1 y Lema 4.7.2, existen $C_4, C_5 > 0$ tales que, para cada $t \in (0, T_{\text{máx}} - \tau)$, llegamos a las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\tau} h_1(s)ds &\leq C_4, \\
\int_t^{t+\tau} h_2(s)ds &\leq C_5.
\end{aligned}$$

Usando el razonamiento presentado en (4.7) mostramos el resultado. ■

Lema 3.7.5. Existe una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{13}, \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\Delta c|^2 \leq C_{13}, \text{ para cada } t \in (0, T_{max} - \tau),$$

donde $\tau = \text{mín}\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$.

Demostración:

Aplicando integración por partes y usando el hecho de que $\partial_\nu c = 0$, observamos que

$$\int_\Omega (\Delta c)c_t = \int_\Omega c_{xx}c_t + c_{yy}c_t = \left(-\int_\Omega c_x(c_t)_x + \int_{\partial\Omega} c_x c_t \nu^x\right) + \left(-\int_\Omega c_y(c_t)_y + \int_{\partial\Omega} c_y c_t \nu^y\right) =$$
$$= -\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla c|^2 + \int_{\partial\Omega} c_t \nu Dc,$$

obteniendo lo siguiente

$$\int_\Omega (-\Delta c)c_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 - \int_{\partial\Omega} c_t\partial_\nu c = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2.$$

De nuestro sistema (4-1) sabemos que

$$c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c.$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad previa por $-\Delta c$ e integrando sobre Ω, conseguimos la expresión

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 + \int_\Omega |\Delta c|^2 = \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c\Delta c + \int_\Omega (u \cdot \nabla c)\Delta c.$$

De la desigualdad de Schwarz, tenemos que $(\alpha n_1 + \beta n_2)^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2)$. Por lo tanto,

$$|\alpha n_1 + \beta n_2|c\Delta c \leq \left[(\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2)\right]^{\frac{1}{2}} c\Delta c = \left[\sqrt{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}c\right]\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta c\right].$$

Aplicando la desigualdad de Young sobre la anterior expresión, observamos que

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}c\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta c\right] &\leq \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}c\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta c\right]^2 \\ &\leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2)c^2 + \frac{1}{4}(\Delta c)^2 \\ &\leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{4}(\Delta c)^2.\end{aligned}$$

Aquí, notamos que la última desigualdad de la cadena de desigualdades anterior es obtenida gracias al Lema 4.7.2 y a la desigualdad

$$(c(\cdot,t))^2 \leq \|c(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}.$$

Utilizando todo lo anterior, mostramos que

$$\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c\Delta c \leq (\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (n_1^2+n_2^2) + \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta c)^2.$$

Ahora, de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg sabemos que

$$\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{GN}\|\Delta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}.$$

Usando la desigualdad de Hölder y la consecuencia previa de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u\cdot\nabla c)\Delta c &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{L^4(\Omega)}\left(C_{GN}\|\Delta c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\Delta c\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \\
&= \left(\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{3}{4}\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{4}C^4_{GN}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{4}\|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 + \|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (\alpha n_1+\beta n_2)c\Delta c + \int_\Omega (u\cdot\nabla c)\Delta c \\
&\leq (\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 + \|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2(\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2) + 2C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3-48}$$

Sean $C_{15} > 0$ tal que $2(\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} < C_{15}$ y $2C_{14}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} < C_{15}$. Definamos las funciones h_1 y h_2 como sigue

$$h_1(t) = C_{15}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2), \quad h_2(t) = C_{15}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

Observemos que por Lema 4.7.1, Lema 4.7.2 y Lema 4.7.3, existe $C_{16} > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c|^2 + \int_t^{t+\tau} h_1(s)ds + \int_t^{t+\tau} h_2(s)ds < C_{16}. \tag{3-49}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe un $t_0 \in (t, t+\tau)$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, s)|^2 = \tau \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2.$$

Luego,

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, s)|^2 \leq \frac{1}{\tau} C_{16}.$$

Observemos que si reescribimos $k = t + \tau$, tenemos que $k \in (\tau, T_{max})$ y $t_0 \in (k - \tau, k)$. Ahora suponga que $k \in (0, \tau]$, entonces, nuevamente por el teorema del valor medio para integrales, conseguimos la existencia de un $t_0 \in (0, k) = (k - \tau, k) \cap (0, \infty)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 = \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \chi_{(0,\infty)(t_0)} = \frac{1}{\tau} \int_{k-\tau}^{k} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \chi_{(0,\infty)}(t_0) =$$
$$\frac{1}{\tau} \int_{k-\tau}^{k} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \leq \frac{1}{\tau} C_{16}.$$

De lo cual, vemos que existe un $t_0 \in (r - \tau, r) \cap [0, \infty)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \leq \text{máx} \left\{ \int_\Omega |\nabla c_0|^2, \frac{C_{16}}{\tau} \right\} = C_{17}.$$

Consideremos ahora el siguiente razonamiento

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) \left(e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \right) \right] =$$
$$\left(\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} + \left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} (-h_2(t)) =$$
$$e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \left[\left(\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 \right) - \left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) h_2(t) \right] \leq e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t) \ .$$

Además, tenemos

$$\int_{t_0}^k \frac{d}{dt} \left[\left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) \left(e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \right) \right] =$$
$$\left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, k)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^k h_2(s)ds} - \left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^{t_0} h_2(s)ds}.$$

Por consiguiente,

$$\left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, k)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^k h_2(s)ds} - \left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \right) \leq \int_{t_0}^k e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t) dt.$$

Así,

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot,k)|^2 \le \frac{1}{e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds}}\left[\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)|^2 + \int_{t_0}^k e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t)dt\right].$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (4-49), el Lema 4.2.3 y que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)|^2 \le C_{17}$, conseguimos la existencia de una constante $C_{18}>0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)| \le C_{18}$, lo cual implica la primera parte de nuestro lema.
Finalmente si integramos (4-48) y tenemos en cuenta que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)| \le C_{18}$, obtenemos directamente la última estimativa deseada. ■

Lema 3.7.6. Sean $p\ge 2$, $i=1,2$ y $\tau = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{6}T_{max}\right\}$. Asuma que existe una constante $M>0$ tal que

$$\int_t^{1+\tau}\int_\Omega n_i^p \le M, \text{ para cada } t\in(0,T_{max}-\tau).$$

Entonces existe una constante $C_{19}(p,M)>0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C_{19}(p,M), \text{ para cada } t\in(0,T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau} n_i^{p+1} \le C_{19}(p,M), \text{ para cada } t\in(0,T_{max}-\tau).$$

Demostración:
Observemos que $\dfrac{d}{dt}n_1^p = pn_1^{p-1}(n_1)_t$ y, por lo tanto,

$$\int_\Omega n_1^{p-1}(n_1)_t = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p.$$

Además, $\nabla(n_1^{p-1}) = (p-1)n_1^{p-2}\nabla n_1$. Entonces,

$$-\int_\Omega n_1^{p-1}\Delta n_1 = -\int_\Omega n_1^{p-1}\Delta n_1 + \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu n_1)n_1^{p-1} = \int_\Omega (\nabla n_1)\cdot(\nabla(n_1^{p-1})) =$$
$$(p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2.$$

Un cálculo simple nos permite deducir que $\nabla\cdot(n_1\nabla c) = (\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + n_1\Delta c$. Así,

$$\int_\Omega \chi_1 n_1^{p-1}\nabla\cdot(n_1\nabla c) = \chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)(\nabla c) + \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a tomar la primera ecuación de nuestro sistema (4-1) y la multiplicamos por n_1^{p-1} para obtener

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p + \int_\Omega n^{p-1}u\cdot\nabla n_1 + (p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 =\\ &= -\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) - \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2).\end{aligned} \tag{3-50}$$

Notemos que:

$$\int_\Omega n_1^p\Delta c = \int_\Omega n_1^p(c_x)_x + \int_\Omega n_1^p(c_y)_y =$$
$$\left(-\int_\Omega (n_1^p)_x c_x + \int_{\partial\Omega} n_1^p c_x\nu^x\right) + \left(-\int_\Omega (n_1^p)_y c_y + \int_{\partial\Omega} n_1^p c_y\nu^y\right) = -p\int_\Omega n_1^{p-1}\nabla c\cdot\nabla n_1,$$

de lo cual vemos que

$$\begin{gathered}-\chi_1\textstyle\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) - \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2) =\\ \displaystyle\chi_1(p-1)\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2)\ .\end{gathered}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{gathered}\int_\Omega n_1^{p-1}u\cdot\nabla n_1 = p\int_\Omega n_1^{p-1}(u_1(n_1)_x + u_2(n_2)_y) = \int_\Omega u_1(n_1^p)_x + \int_\Omega u_2(n_2^p)_y =\\ -\int_\Omega (u_1)_x n_1^p + \int_{\partial\Omega} u_1 n_1^p\nu^x - \int_\Omega (u_2)_y n_2^p + \int_{\partial\Omega} u_2 n_2\nu^y = \int_\Omega n_1^p\nabla\cdot u = 0.\end{gathered}$$

Teniendo en cuenta las anteriores igualdades y reemplazando en la expresión (4-50), llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p + p(p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 = &\, p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + p\mu_1\int_\Omega n_1^p\\ &- p\mu_1\int_\Omega n_1^p - p\mu_1\int_\Omega n_1^{p+1} - a_1p\mu_1\int_\Omega n_1^p n_2.\end{aligned} \tag{3-51}$$

Notemos que

$$\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 = \int_\Omega n_1^{p-1}((n_1)_x c_x + (n_1)_y c_y) = \frac{1}{p}\int_\Omega (n_1^p)_x c_x + \frac{1}{p}\int_\Omega (n_1^p)_y c_y = -\frac{1}{p}\int_\Omega n_1^p\Delta c.$$

Luego,

$$p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) = -(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c \le (p-1)\chi_1\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg garantizamos la existencia de una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\int_\Omega (n_1^{\frac{p}{2}})^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \|n_1^{\frac{p}{2}}\|^2_{L^4(\Omega)} \leq C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_1\|n_1^{\frac{p}{2}}\|^2_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)} \leq$$
$$C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_2.$$

Esta última igualdad se consiguió utilizando el Lema 4.7.1 y $\|n_1^{\frac{p}{2}}\|^2_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)} = \int_\Omega n_1(\cdot,t)$. Además, observemos que $|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}| = \left[(n_1^{\frac{p}{2}})_x\right]^2 + \left[(n_1^{\frac{p}{2}})_y\right]^2 = \frac{p}{2}(n_1^{p-2})|\nabla n_1|^2$. Por lo tanto,

$$(p-1)\chi_1\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$(p-1)\chi_1\left(C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_2\right)\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{p}{2}(p-1)\chi_1 C_1\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n^p\right)^{\frac{1}{2}} + (p-1)\chi_1 C_2\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la desigualdad de Young, existe una constante $k_3^1 \geq 0$ tal que

$$\frac{p}{2}(p-1)\chi_1 C_1\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n^p\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$p(p-1)\left[\frac{1}{2}\int_\Omega n^{p-2}|\nabla n|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_1 C_1}{2}\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^p\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] =$$
$$p(p-1)\left(\int_\Omega n^{p-2}|\nabla n|^2\right) + p(p-1)k_3^1\int_\Omega |\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p.$$

Por otro lado, usando nuevamente la desigualdad de Young, existe una constante $k_3^2 \geq 0$ tal que

$$(p-1)\chi_1 C_2\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\chi_1^2 C_2^2\int_\Omega |\Delta c|^2 + \frac{1}{2}(p-1)^2 \leq k_3^2\int_\Omega |\Delta c|^2 + k_3^2.$$

Tomando $C_3 = \text{máx}\{k_3^1, k_3^2\}$, mostramos que

$$p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) \leq$$
$$p(p-1)\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n|^2\right) + p(p-1)C_3\int_\Omega |\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p + C_3\int_\Omega |\Delta c|^2 + C_3.$$

Reemplazando la anterior desigualdad en (4-51) y simplificando, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p \leq C_3\int_\Omega |\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p + C_3\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right) + C_3 + p\mu_1\int_\Omega n_1^p - p\mu_1\int_\Omega n_1^{p+1}. \tag{3-52}$$

Por las desigualdades de Hölder y Young, tenemos que

$$\int_\Omega \frac{n_1^p}{2}\cdot 2 \le \left(\int_\Omega \left(\frac{n_1}{2}\right)^{p\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega 2^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{2^{p+1}(p+1)}\left(\int_\Omega n_1^{p+1}\right) + \frac{2^p}{p}|\Omega| \le \frac{1}{2}\int_\Omega n_1^{p+1} + \frac{2^p}{p}|\Omega|.$$

De modo que podemos concluir que existe una constante $C_4 > 0$ tal que

$$p\mu_1 \int_\Omega n_1^p \le \frac{p\mu_1}{2}\int_\Omega n_1^{p+1} + C_4.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y la desigualdad (4-52), tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p \le C_3 \int_\Omega |\Delta c|^2 \int_\Omega n_1^p + C_3\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right) + C_3 + C_4. \tag{3-53}$$

Denotemos por $h(t) := C_3 \int_\Omega |\nabla c(\cdot,t)|^2$ con $t \in (0, T_{max})$. Por el lema 4.7.5, tenemos que existe una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} h(t) \le C_{13} \text{ con } t \in (0, T_{max}-\tau).$$

Usando el razonamiento realizado en el Lema 4.7.5 con el uso del Teorema del Valor Medio para integrales, conseguimos que, dado $k \in (0, T_{max})$, existe $t_0 \in (t-\tau, t)\cap[0,\infty)$ tal que

$$\int_\Omega n_1^p(\cdot, t_0) \le C_6 := \text{máx}\left\{\int_\Omega n_0^p, \frac{L}{\tau}\right\}, \text{ para algún } L > 0.$$

Utilizando la misma técnica del lema previo, la anterior cota nos implica la existencia de una constante $C_7 > 0$ satisfaciendo $\int_\Omega n_1^p(\cdot,t) \le C_7$, demostrando el resultado. ■

Lema 3.7.7. Para todo $p > 1$ e $i = 1, 2$, existe una constante $C_{20}(p) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C_{20}(p), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Sabemos del Lema 4.7.1 que existe $C_8 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_i^2(\cdot,t) \le C_8 \text{ para cada } t \in (0, T_{max}-\tau).$$

Por el lema anterior, tenemos que existe una constante $C_{19}(2) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C_{19}(2), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además, por el Teorema de Fubini y usando nuevamente el Lema 4.7.1, llegamos a

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_i^3 = \int_\Omega\int_t^{t+\tau} n_i^3 \le C_{19}(2)|\Omega|, \quad \text{para cada } t \in (0, T_{max}-\tau).$$

Continuando de la misma forma y usando el Lema 4.7.6, mostramos de manera inductiva nuestro Lema para cada $p > 1$ con $p \in \mathbb{Z}$. Restaría probar el resultado para los valores de p que no son enteros. Para ello, observe que si tomamos un $r \in (p, p+1)$ con $p > 1$ entero, entonces existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega)\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

En caso de que $r \in (1,2)$ tenemos que $\|n_i(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega)\|n_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$. Teniendo en cuenta lo anterior y que nuestro Lema ya está demostrado para enteros mayores a 1, se sigue lo que se desea para cualquier $p > 1$. ■

Lema 3.7.8. Para todo $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, existe una constante $C_{21}(\sigma_1) > 0$ tal que

$$\|A^{\sigma_1}u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{21}(\sigma_1), \text{ para todo } t \in (\tau, T_{max}),$$

donde $\tau = \min\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$. En particular, existen constantes $\lambda \in (0,1)$ y $C_{22} > 0$ tales que

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^\lambda(\Omega)} \leq C_{22}, \text{ para todo } t \in (\tau, T_{max}).$$

Demostración:

Fijemos $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Por hipótesis, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es un dominio con frontera suave. Entonces, por el Lema 2.8.7,

$$D(A) = L^2_\sigma(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega)^n \cap W^{2,2}(\Omega)^n.$$

Tomemos $t \in (\tau, T_{max})$ y $t_0 = \max\{\tau, t-1\}$. Por la fórmula de variación de parámetros, tenemos que

$$u(\cdot,t) = e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u](\cdot,s)ds.$$

Luego, aplicando A^α en la expresión anterior conseguimos

$$\begin{aligned}\|A^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq & \|A^\alpha e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u]\|_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Si $t_0 = \tau$, entonces, por las propiedades del semigrupo de Stokes, tenemos que

$$\|A^\alpha e^{-(t-\tau)A}u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-(t-\tau)A}A^\alpha u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\alpha u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $t_0 > \tau$, entonces $t - t_0 = 1$. Dado que A^α es un operador auto-adjunto definido positivo y teniendo en cuenta el Lema 2.3.17, tenemos que

$$\|A^\alpha e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Ae^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|^\alpha_{L^2(\Omega)}\|e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|^{1-\alpha}_{L^2(\Omega)}.$$

Ahora, en vista de las propiedades que tenemos del semigrupo de Stokes, sabemos que $\|A^\alpha e^{-tA}\| \leq t^{-\alpha}$. Además, $\|e^{-tA}\| \leq 1$, para cada $t \geq 0$, y usando el Lema 4.7.7, obtenemos la existencia de una constante $C_4 > 0$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-(t-t_0)A} u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4.$$

Usando de similar forma las mismas estimativas previamente mencionadas, sabemos que existe $C_5 > 0$ tal que

$$\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-(t-s)A} \mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{C_5}{1-\alpha}.$$

Por otro lado,

$$\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-(t-s)A} \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|u(\cdot, s) \cdot \nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Tomando $\beta \in (\frac{1}{2}, \alpha)$ y usando el hecho de que $D(A^\beta) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, observamos que existe $C_6 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, s) \cdot \nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_6 \|A^\beta u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ahora, definamos $M(T) := \sup_{t\in(\tau,T)} \|A^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$ con $T \in (\tau, T_{max})$. Usando la fórmula de interpolación del Lema 2.3.17 con $a = \frac{2\beta-1}{2\alpha-1} \in (0,1)$ y teniendo en cuenta que $\|A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, entonces podemos garantizar la existencia de constantes $C_7, C_8 > 0$ que satisfacen

$$\begin{aligned}C_6 \|A^\beta u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_7 \|A^\alpha u(\cdot, s)\|^a_{L^2(\Omega)} \|\nabla u(\cdot, s)\|^{2-a}_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_8 M^a(T).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{t_0}^{t} \|A^\alpha e^{-(t-s)A} \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq C_8 M^a(T) \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \leq \frac{C_1 C_8}{1-\alpha} M^\alpha(T).$$

Luego, existen $C_9, C_{10} > 0$ tales que

$$\|A^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 + C_{10} M^a(T),$$

para cada $t \in (\tau, T)$. Así,

$$M(T) \leq C_9 + C_{10} M^a(T),$$

para todo $T \in (\tau, T_{max})$. Usando el Lema 2.6.10 vemos que $M(T) \leq \max\{2C_9, (2C_{10})^{\frac{1}{1-a}}\}$. Haciendo $T \to T_{max}$, mostramos la primera desigualdad de nuestro Lema. La segunda parte de nuestro resultado, la demostramos gracias a que el operador de Stokes satisface las siguientes inmersiones $D(A) \hookrightarrow D(A^\alpha) \hookrightarrow C^\theta(\Omega)$, con $\theta \in (0, 2\alpha - 1)$. ■

Lema 3.7.9. Existe una constante $C_{24} > 0$ tal que

$$\|c(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_{24}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Por resultados de regularidad parabólica, tenemos que $c \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}])$. Luego,

$$\|c_x\|_{L^1(\Omega\times(0,T_{max}))} \quad \text{y} \quad \|c_y\|_{L^1(\Omega\times(0,T_{max}))} < \infty.$$

Por lo tanto, ∇c es acotada c.t.p en $\Omega \times (0, 2\tau]$ y, así, $\|c(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}}$ es acotada para cada $t \in (0, 2\tau]$. Veamos que también es acotado para cada $t \in (2\tau, T_{max})$, con lo cual terminaría la prueba. Primero, observemos que de la fórmula de variación de parámetros, conseguimos

$$c(\cdot, t) = e^{(t-\tau)\Delta} c(\cdot, \tau) - \int_\tau^t e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot, s)ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \nabla e^{(t-\tau)\Delta} c(\cdot, \tau) - \int_\tau^t \nabla e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot, s)ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq C_3(1 + (t-\tau)^{-1})e^{-\lambda_1(t-\tau)}\|c(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_3 \int_\tau^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{4}} e^{-\lambda_1(t-\tau)})\|(\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + C_3 \int_\tau^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{2}})e^{\lambda_1(t-\tau)}\|u(\cdot, s)\nabla c(\cdot, s)\|_{L^1(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Definamos $M(T) := \sup_{t\in(2\tau,T)} \|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ con $T \in (2\tau, T_{\text{máx}})$. Notemos que $M(T)$ está bien definido debido a que $c \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}])$. Por el Lema 4.7.2, Lema 4.7.5, Lema 4.7.7, Lema 4.7.8 y las desigualdades de Cauchy, Hölder y Gagliardo-Nirenberg, sabemos que existen $K_1, K_2, K_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|c(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_1, \\
\|(\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^4(\Omega)} &\leq \|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}(\alpha\|n_1(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} + \beta\|n_2(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)}) \leq K_2, \\
\|u(\cdot, t)\nabla c(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C_{22}\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{22}\|\nabla c(\cdot, s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|c(\cdot, s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \leq K_3,
\end{aligned}$$

para cada $t \in (0, T_{max})$. Tomando $t > 2\tau$, tenemos que $(t-\tau)^{-1} \leq \tau^{-1}$. Así,

$$\begin{aligned}
\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq& C_3(1 + \tau^{-1})K_1 + C_3K_2 \int_\tau^t \left(1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{4}} e^{-\lambda_1(t-\tau)}\right) \\
&+ C_3K_3M(T)^{\frac{1}{2}} \int_\tau^t \left(1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\lambda_1(t-\tau)}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existen $K_4, K_5 \geq 0$ tales que

$$M(T) \leq K_4 + K_5M(T)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el lema 2.6.10, vemos que

$$M(T) \leq \text{máx}\{2K_4, (2K_5)^2\}, \text{ para cada } T \in (2\tau, T_{\text{máx}}),$$

consiguiéndose lo deseado. ■

Lema 3.7.10. Para cada $i = 1, 2$, existe una constante $C_{27} > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{27}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Sabemos que $n_1 \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}))$, si probamos que existe un $\tau_1 \in (0, T_{max})$ tal que

$$\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{28}(\tau_1), \text{ para todo } t \in (\tau_1, T_{max}),$$

conseguiríamos de manera inmediata que para todo $t \in (0, T_{max})$

$$\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{máx}\left\{\sup_{\overline{\Omega}\times[0,\tau_1]} |n_1|, C_{28}(\tau_1)\right\} := C_{27}.$$

Probemos este resultado. De nuestro sistema tenemos la igualdad

$$(n_1)_t = (\Delta - 1)n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) + n_1.$$

De la fórmula de variación de parámetros, obtenemos que para todo $t \in (\tau, T_{max})$

$$\begin{aligned} n_1(t) = {} & e^{\left(t-\frac{\tau}{2}\right)(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) - \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)} \nabla \cdot (n_1 \chi_1 \nabla c + n_1 u) \\ & + \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)} [\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) + n_1] \qquad =: J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.7.15, tomando $p > 2$ y $\eta > \frac{1}{p}$, conseguimos

$$\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| e^{\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_4 \left\| (-\Delta + 1)^\eta e^{(t-\frac{\tau}{2})(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Usando el postulado 2 del Lema 2.7.15, tenemos que

$$C_4 \left\| (-\Delta + 1)^\eta e^{(t-\frac{\tau}{2})(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 C_5 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^{-\eta} e^{-\lambda_2 t} \left\| n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Como $t > \tau$ entonces $t - \frac{\tau}{2} > \frac{\tau}{2}$, con lo que $(t - \frac{\tau}{2})^{-\eta} < 2^\eta \tau^{-\eta}$. Por el Lema 4.7.7, observamos que $\left\|n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{20}(p)$. Por lo tanto, concluimos que

$$\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} < C_4 C_5 2^\eta \tau^{-\eta} C_{20}(p).$$

Ahora, analicemos J_2. Aplicando nuevamente el primer enunciado del Lema 2.7.15 se consigue

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} \|e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c + n_1 u)(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds\\ &\leq C_4\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}-\eta\right)$ y aplicando el postulado 3 del Lema 2.7.15, llegamos a que

$$\begin{aligned}&C_4\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &\qquad\leq C_4C_6\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}(t-s)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3(t-s)}\|n_1\chi_1\nabla c+n_1u\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Por el Lema 4.7.7, Lema 4.7.8 y Lema 4.7.9, existe $C_{29}>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|n_1\chi_1\nabla c+n_1u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \chi_1\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^\infty(\Omega)}+\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \chi_1\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|c\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < C_{29}.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_4C_6C_{29}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &\leq C_4C_6\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}(t-s)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3(t-s)}ds\\ &= C_4C_6\int_0^{\frac{\tau}{2}}(r)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3 r}dr\\ &\leq C_4C_6\int_0^{\infty}(r)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3 r}dr<\infty.\end{aligned}$$

Ahora, observemos que

$$\mu_1n_1(1-n_1-a_1n_2)+n_1 \leq \mu_1n_1-\mu_1n_1^2+n_1=(1+\mu_1)n_1-\mu_1n_1^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}J_3 &= \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}[\mu_1n_1(1-n_1-a_1n_2)+n_1](\cdot,s)ds\\ &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}[(1+\mu_1)n_1-\mu_1n_1^2](\cdot,s)ds\\ &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}\left[-\mu_1\left(n_1-\frac{1+\mu_1}{2\mu_1}\right)^2+\frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\right](\cdot,s)ds\\ &\leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}ds.\end{aligned}$$

Del principio del máximo, tenemos que

$$e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)} \leq \|e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}\|_{C^0} \leq \|e^{-(t-s)}\|_{C^0} = e^{-(t-s)}.$$

Luego,

$$\frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}ds \leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{-(t-s)}ds \leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}(1-e^{-\frac{\tau}{2}}).$$

Finalmente, concluimos que existe un $C_{30}(\tau) > 0$ tal que

$$n_1(t) \leq J_1 + J_2 + J_3 \leq \|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} + J_3 \leq C_{30}(\tau),$$

cumpliéndose así lo que se quería. ■

Prueba del Teorema 4.2.1:
Sabemos que existe una constante $k > 0$ tal que $\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq k|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. Por el Lema 4.7.8, Lema 4.7.9, Lema 4.7.10 y tomando $t < T_{max}$ lo suficientemente cerca a T_{max}, conseguimos que

$$\begin{aligned}\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq 2C_{27} + C_{24} + k\|\Omega\|^{\frac{1}{p}}C_{24} + C_{21}(\sigma_1) < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema 4.2.3, tenemos que $T_{max} = \infty$, cumpliéndose así lo deseado.

3.8. Sobre la estabilidad de la concentración de especies

En esta sección vamos a mostrar un estimativo para la estabilización de (4-1) para $a_1, a_2 \in (0,1)$. Para tal propósito, inicialmente tenemos el siguiente lema.

Lema 3.8.1. Sean $a_1, a_2 \in (0,1)$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Para la solución de (4-1), existen constantes positivas $\hbar_1$, ℓ_1 y ε_1 tales que las funciones no negativas E_1 y F_1, definidas como

$$\begin{aligned}E_1 &:= \int_\Omega \left(n_1 - N_1^*\log\frac{n_1}{N_1^*}\right) + \hbar_1\int_\Omega\left(n_2 - N_2^*\log\frac{n_2}{N_2^*}\right) + \frac{\ell_1}{2}\int_\Omega c^2,\\ F_1 &:= \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 + \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2,\end{aligned}$$

cumplen que, para cada $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq -\varepsilon_1 F_1(t). \tag{3-54}$$

Aquí $N_1^* := \dfrac{1-a_1}{1-a_1a_2}$ y $N_2^* := \dfrac{1-a_2}{1-a_1a_2}$.

Demostración:

Fijemos por ahora $\hbar_1, \ell_1 > 0$ y denotemos por A_1, A_2 y B_1 a las funciones definidas como

$$A_i(t) := \int_\Omega \left(n_i - N_i^* \log \frac{n_i}{N_i^*} \right), \text{ para } i = 1, 2,$$
$$B_1(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega c^2.$$

Así, podemos reescribir a $E_1(t)$ como sigue

$$E_1(t) = A_1(t) + \hbar_1 A_2(t) + \ell_1 B_1(t). \tag{3-55}$$

Definamos $H(s) := s - N_1^* \log(s)$ con $s > 0$. Observemos que podemos reescribir a A_1 en términos de $H(s)$ como sigue

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \int_\Omega n_1 - N_1^*(\log(n_1) - \log(N_1^*)) \\ &= \int_\Omega H(n_1) + N_1^* \log(N_1^*) - N_1^* + N_1^* \\ &= \int_\Omega H(n_1) - H(N_1^*) + N_1^*. \end{aligned} \tag{3-56}$$

Asuma que $n_1(x,t) > N_1^*$, usando la fórmula de Taylor sobre H con centro en N_1^*, aplicando la forma de Lagrange para el residuo y teniendo en cuenta que $H'(N_1^*) = 0$ conseguimos que

$$\begin{aligned} H(n_1) - H(N_1^*) =& H'(N_1^*)(n_1(x,t) - N_1^*) + \frac{1}{2} H''(z)(n_1(x,t) - N_1^*)^2 \\ =& \frac{N_1^*}{2z^2}(n_1(x,t) - N_1^*)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

para algún z que pertenece al intervalo $(N_1^*, n_1(x,t))$. En caso de que $n_1(x,t) \leq N_1^*$ se procede de manera similar. Así, se concluye que $A_1(t) \geq 0$.
Ahora, al usar la primera ecuación de (4-1) llegamos a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_1(t) =& \frac{d}{dt} \int_\Omega n_1 - N_1 \log \frac{n_1}{N_1^*} \\ =& \int_\Omega (n_1)_t - \frac{N_1^*}{n_1}(n_1)_t \\ =& \int_\Omega (n_1)_t \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1} \right) \\ =& \int_\Omega (\Delta n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2)) \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1} \right). \end{aligned} \tag{3-57}$$

A continuación realizamos un análisis en cada uno de los términos de la integral previa.

$$\int_\Omega \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1} \right) \Delta n_1 = - \int_\Omega \nabla n_1 \cdot \nabla \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1} \right) = - \int_\Omega \nabla n_1 \cdot N_1^* \frac{\nabla n_1}{n_1^2} = -N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2}.$$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) u\cdot\nabla n_1 =& -\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_1(n_1)_x+u_2(n_1)_y] \\
=& -\left(\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_1(n_1)_x]+\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_2(n_1)_y]\right) \\
=& \int_\Omega \left[\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)_x u_1+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)(u_1)_x\right] n_1 \\
&+\int_\Omega \left[\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)_y u_2+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)(u_2)_y\right] n_1 \\
=& \int_\Omega n_1\nabla\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\cdot u+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) n_1\nabla\cdot u \\
=& \int_\Omega n_1 N_1^*\frac{\nabla n_1}{n_1^2}\cdot u \\
=& N_1^*\int_\Omega \frac{\nabla n_1}{n_1}\cdot u \\
=& N_1^*\int_\Omega \nabla\log(n_1)\cdot u \\
=& -N_1^*\int_\Omega \log(n_1)\nabla\cdot u=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla\cdot(n_1\nabla c) =& -\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c-\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) n_1\Delta c \\
=& -\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c+\int_\Omega \chi_1\nabla\left(n_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\right)\cdot\nabla c \\
=& \int_\Omega \chi_1 n_1\nabla\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\cdot\nabla c \\
=& \int_\Omega \chi_1 n_1 N_1^*\frac{\nabla n_1}{n_1^2}\cdot\nabla c \\
=& \chi_1 N_1^*\int_\Omega \frac{\nabla n_1}{n_1}\cdot\nabla c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) =& \int_\Omega \mu_1 n_1(1-n_1+N_1^*-N_1^*-a_1n_2)\,(n_1-N_1^*) \\
=& -\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)^2 \\
&+\mu_1\int_\Omega (1-N_1-a_1n_2)(n_1-N_1^*) \\
=& -\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)^2 \\
&-a_1\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)(n_2-N_2^*).
\end{aligned}$$

Reemplazando las igualdades previas en (4-57) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_1(t) =& -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) - N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2} \\ &+ N_1^*\chi_1 \int_\Omega \frac{\nabla n_1 \cdot \nabla c}{n_1}.\end{aligned} \tag{3-58}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_2(t) =& -\mu_2 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) - N_2^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} \\ &+ N_2^*\chi_2 \int_\Omega \frac{\nabla n_2 \cdot \nabla c}{n_2}.\end{aligned} \tag{3-59}$$

Aplicando las fórmulas de Green, integración por partes y teniendo en cuenta la tercera ecuación del sistema (4-1) concluimos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_1(t) &= \int_\Omega c(c)_t \\ &= \int_\Omega c(-u \cdot \nabla c + \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c) \\ &= -\int_\Omega |\nabla c|^2 - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^2.\end{aligned} \tag{3-60}$$

Dada la positividad de las funciones n_1, n_2 y c, usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = 1$, la igualdad $\frac{\nabla n_1}{n_1} = \nabla \log(n_1)$ y las ecuaciones (4-58), (4-59) y (4-60) sobre la derivada con respecto a t de (4-55), conseguimos la existencia de una constante $C_1 > 0$ verificando

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_1(t) \leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_1^*\chi_1 \int_\Omega \frac{\nabla n_1 \cdot \nabla c}{n_1} \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_2^*\chi_2 k_1 \int_\Omega \frac{\nabla n_2 \cdot \nabla c}{n_2} \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 - N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2} - N_2^* k_1 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} \\
\leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_1^* \left(\int_\Omega \frac{|\nabla n_1|}{n_1} |\chi_1 \nabla c| \right) \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_2^* k_1 \left(\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|}{n_2} |\chi_2 \nabla c| \right) \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 - N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2} - N_2^* k_1 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} \\
\leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + \frac{N_1^*\chi_1^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + \frac{k_1 N_2^*\chi_2^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
= & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 k_1) \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 + \left(\frac{N_1^*\chi_1^2}{4} + \frac{k_1 N_2^*\chi_2^2}{4} - \ell_1 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_1(t) \leq & \int_\Omega (-\mu_1(n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 k_1)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \\
& - k_1\mu_2(n_1 - N_1^*)) + \left(\frac{N_1^*\chi_1^2}{4} + \frac{k_1 N_2^*\chi_2^2}{4} - \ell_1 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned}
\tag{3-61}
$$

Tomando $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ y usando la desigualdad de Cauchy con $\varphi = \mu_1 - \varepsilon$, vemos que

$$
\begin{aligned}
-(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) & \leq |(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*)| \\
& \leq \frac{1}{4(\mu_1 - \varepsilon)} (a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2 + (\mu_1 - \varepsilon)(n_1 - N_1^*)^2 \\
& = -\varepsilon(n_1 - N_1^*)^2 + \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} + \mu_1(n_1 - N_1^*)^2.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
-\mu_1(n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \leq & -\varepsilon(n_1 - N_1^*)^2 \\
& + \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$-\mu_1(n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) - k_1\mu_2(n_2 - N_2^*)^2$$
$$\leq -\varepsilon(n_1 - N_1^*)^2 - \underbrace{\left(k_1\mu_2 - \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)}\right)}_{:=\varsigma}(n_2 - N_2^*)^2. \quad (3\text{-}62)$$

Teniendo en cuenta que $a_1, a_2 \in (0,1)$, sabemos que existe $\varepsilon_0 \in (0, \mu_1)$ lo suficientemente pequeño tal que

$$a_1\mu_1 < \frac{\mu_1}{a_2} - \frac{\varepsilon_0}{a_2}.$$

De lo anterior, conseguimos la desigualdad $\dfrac{1}{a_2} > \dfrac{a_1\mu_1}{\mu_1 - \varepsilon_0}$. Luego, al tomar $k_1 = a_1 a_2$ observamos que

$$\varsigma = k_1\mu_2 - \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)}{4(\mu_1 - \varepsilon_0)} = \frac{a_1\mu_1}{a_2} - \frac{a_1^2\mu_1^2}{\mu_1 - \varepsilon_0} > 0.$$

Así, eligiendo $\ell_1 > \dfrac{N_1^*\chi_1^2}{4} + \dfrac{k_1 N_2^*\chi_2^2}{4}$ obtenemos (4-54) de (4-61) y (4-62). ■

Lema 3.8.2. Sean $a_1, a_2 \in (0,1)$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces. existe una constante $C_{31} > 0$ verificando la desigualdad

$$\int_0^\infty \int_\Omega (n_1 - N_1)^2 + \int_0^\infty \int_\Omega (n_2 - N_2)^2 \leq C_{31}.$$

Demostración:

Tome $t > 0$, integrando (4-54) sobre $(0,t)$, teniendo en cuenta la no negatividad de E_1 y haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo conseguimos que

$$-E_1(0) \leq E_1(t) - E_1(0) \leq -\varepsilon_1 \int_0^t F_1(s)ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t F_1(s)ds \leq \frac{1}{\varepsilon_1} E_1(0)$$

para cada $t > 0$. Por consiguiente, tomando $t \to \infty$ demostramos lo deseado. ■

Lema 3.8.3. Sean $a_1 \geq 1 > a_2$ y asuma las mismas hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces, existen constantes positivas k_2, ℓ_2 y ε_2 tales que para las funciones no negativas E_2 y F_2, definidas como

$$E_2 := \int_\Omega n_1 + k_2 \int_\Omega (n_2 + \log n_2) + \frac{\ell_2}{2} \int_\Omega c^2 \quad (3\text{-}63)$$

y

$$F_2 := \int_\Omega n_1^2 + \int_\Omega (n_2 - 1)^2, \quad (3\text{-}64)$$

cumplen la desigualdad

$$\frac{d}{dt} E_2(t) \leq -\varepsilon_2 F_2(t) \quad (3\text{-}65)$$

para cada $t > 0$.

Demostración:

Definamos las funciones

$$A_3(t) := \int_\Omega n_1, \quad A_4(t) := \int_\Omega (n_2 - \log n_2), \quad B_2(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega c^2.$$

Entonces, fijando de manera momentánea las constantes $\Bbbk_2, \ell_2 > 0$, reescribimos la expresión (4-63) como

$$E_2(t) = A_3(t) + \Bbbk_2 A_4(t) + \ell_2 B_2(t). \tag{3-66}$$

Definiendo $H(s) := s - \log s$ con $s > 0$ y realizando un procedimiento análogo al encontrado en (4-56) vemos que A_4 es no negativa. Ahora, teniendo en cuenta la primera ecuación de nuestro sistema (4-1), usando el hecho de que $a_1 \geq 1$, aplicando integración por partes, fórmulas de Green y condiciones en la frontera, obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_3 =& \int_\Omega (n_1)_t \\
=& \int_\Omega \left(-u\cdot\nabla n_1 + \Delta n_1 - \chi_1 \nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2)\right) \\
\leq& - \int_\Omega u\cdot\nabla n_1 + \int_\Omega \Delta n_1 - \chi_1 \int_\Omega \nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1 \int_\Omega n_1(1 - n_1 - n_2) \\
=& \int_\Omega n_1 \nabla\cdot u + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu n_1 dS - \chi_1 \int_\Omega \nabla n_1\cdot\nabla c \\
&- \chi_1 \int_\Omega n_1\Delta c + \mu_1 \int_\Omega (n_1(1-n_2) - n_1^2) \\
=& \chi_1 \int_\Omega n_1\cdot\Delta c - \chi_1 \int_\Omega n_1\Delta c + \mu_1 \int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1 \int_\Omega n_1^2.
\end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\frac{d}{dt}A_3 \leq \mu_1 \int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1 \int_\Omega n_1^2. \tag{3-67}$$

Por otro lado, de la segunda ecuación del sistema (4-1) llegamos a la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_4 &= \int_\Omega (n_2)_t - \frac{1}{n_2}(n_2)_t \\
&= \int_\Omega \left(-u\cdot\nabla n_2 + \Delta n_2 - \chi_2\nabla\cdot(n_2\nabla c) + \mu_2 n_2(1 - a_2 n_1 - n_2)\right)\left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right).
\end{aligned} \tag{3-68}$$

Realizando un análisis a cada término resultante de la igualdad anterior y usando integración por partes, observamos que

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u\cdot\nabla n_2\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) &= \int_\Omega n_2\nabla\cdot\left(\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)u\right)\\
&= \int_\Omega n_2\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\cdot u\\
&= \int_\Omega n_2\left(\frac{\nabla n_2}{n_2^2}\right)\cdot u\\
&= \int_\Omega \frac{\nabla n_2}{n_2}\cdot u\\
&= \int_\Omega \nabla\log n_2\cdot u\\
&= -\int_\Omega \log n_2\nabla\cdot u = 0.
\end{aligned} \tag{3-69}$$

Usando las fórmulas de Green tenemos que

$$\int_\Omega \Delta n_2\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = -\int_\Omega \nabla n_2\cdot\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = -\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2}. \tag{3-70}$$

De la integración por partes conseguimos

$$-\chi_2\int_\Omega \nabla\cdot(n_2\nabla c)\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = \chi_2\int_\Omega n_2\nabla c\cdot\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = \chi_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2}. \tag{3-71}$$

Reemplazando (4-69), (4-70), (4-71) en (4-68) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}A_4 = -\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} + \chi_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2} - \mu_2\int_\Omega (n_2-1)^2 - a_2\mu_2\int_\Omega n_1(n_2-1). \tag{3-72}$$

Realizando el mismo razonamiento hecho en (4-60) obtenemos

$$\frac{d}{dt}B_2(t) = -\int_\Omega |\nabla c|^2 - \int_\Omega c^2(\alpha n_1+\beta n_2). \tag{3-73}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta , (4-67), (4-72), (4-73), conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2 =& \frac{d}{dt}A_3 + \hbar_2\frac{d}{dt}A_4 + \ell_2\frac{d}{dt}B_2\\
\leq& \mu_1\int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1\int_\Omega n_1^2 - \hbar_2\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} + \chi_2\hbar_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2}\\
&- \mu_2\hbar_2\int_\Omega (n_2-1)^2 - a_2\mu_2\hbar_2\int_\Omega n_1(n_2-1) - \ell_2\int_\Omega |\nabla c|^2\\
&- \ell_2\int_\Omega c^2(\alpha n_1+\beta n_2).
\end{aligned} \tag{3-74}$$

Usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\chi_2 \hbar_2 \int_\Omega \frac{\nabla n_2 \cdot \nabla c}{n_2} \leq& \chi_2 \hbar_2 \int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right| |\nabla c| \\
\leq& \hbar_2 \left(\int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right| |\chi_2 \nabla c| \right) \\
\leq& \hbar_2 \left(\int_\Omega \frac{1}{4} |\chi_2 \nabla c|^2 + \int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right|^2 \right) \\
\leq& \frac{\hbar_2 \chi_2^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 + \hbar_2 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2}.
\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (4-74) y teniendo en cuenta que $\ell_2, c, n_1, n_2 > 0$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2 \leq& -\mu_1 \int_\Omega n_1^2 - (\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2) \int_\Omega n_1 (n_2 - 1) \\
&- \mu_2 \hbar_2 \int_\Omega (n_2 - 1)^2 + \left(\frac{\hbar_2 \chi_2^2}{4} - \ell_2 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned} \tag{3-75}$$

Además, de la desigualdad de Cauchy con $\varphi = \mu_1 - \varepsilon$ y $\varepsilon \in (0, \mu_1)$, observamos que

$$\begin{aligned}
-(\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2) n_1 (n_2 - 1) \leq& |(\mu_1 + a_1 \mu_2 \hbar_2) n_1 (n_2 - 1)| \\
\leq& \frac{1}{4(\mu_1 - \varepsilon)} (\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2)^2 (n_2 - 1)^2 + (\mu_1 - \varepsilon) n_1^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$-\mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \int_\Omega (\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2) n_1 (n_2 - 1) \leq -\varepsilon \int_\Omega n_1^2 + \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \int_\Omega (n_2 - 1)^2. \tag{3-76}$$

Reemplazando (4-76) en (4-74) y tomando $\ell_2 > \frac{\hbar_2 \chi_2^2}{4}$, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2 \leq& -\varepsilon \int_\Omega n_1^2 - \left(\mu_2 \hbar_2 - \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \right) \int_\Omega (n_2 - 1)^2 \\
&+ \left(\frac{\hbar_2 \chi_2^2}{4} - \ell_2 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
\leq& -\varepsilon \int_\Omega n_1^2 - \left(\mu_2 \hbar_2 - \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \hbar_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \right) \int_\Omega (n_2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\varepsilon \in (0, (1 - a_2)\mu_1)$ tal que $\hbar_2 = \frac{\mu_1}{4(\mu_1 - \varepsilon)}$, obtenemos la desigualdad (4-65). ■

Lema 3.8.4. Sean $a_1 \geq 1 > a_2$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces, existe una constante $C_{32} > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \int_\Omega n_1^2 + \int_0^\infty \int_\Omega (n_2 - 1)^2 \leq C_{32}.$$

Demostración:

Tomando $t>0$, integrando sobre $(0,t)$ en (4-65) y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, conseguimos la desigualdad

$$E_2(t)-E_2(0)\leq -\varepsilon_2\int_0^t F(s)ds.$$

Usando lo anterior y la no negatividad de E_2, tenemos que

$$\varepsilon_2\int_0^t F(s)ds\leq E_2(t)+\varepsilon_2\int_0^t F(s)ds\leq E_2(0).$$

Dado que $t>0$ es arbitrario, obtenemos lo deseado. ■

Lema 3.8.5. Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, existe $C_{33}>0$ y $\theta_0>0$ tales que

$$\|n_i\|_{C^{\theta_0,\frac{\theta_0}{2}}(\overline{\Omega}\times[t,t+1])}\leq C_{33},$$

para todo $t\geq 1$ e $i=1,2$.

Demostración:

Reescribiendo la primera ecuación de (4-1) conseguimos la igualdad

$$(n_1)_t-\nabla\cdot\underbrace{(\nabla n_1-\chi_1 n_1\nabla c)}_{:=a(x,t,n_1,\nabla n_1)}=\underbrace{u\cdot\nabla n_1+\mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2)}_{b(x,t,n_1,\nabla n_1)}.$$

Observemos que, por los valores iniciales y de la frontera de n_1, vemos que

$$\begin{aligned}&(\nabla n_1-\chi_1 n_1\nabla c)\cdot\nu=\partial_\nu n_1-\chi_1 n_1\partial_\nu c=0,\\&n_1(\cdot,0)=n_1,0.\end{aligned}$$

Tomando $t\geq 1$, $p=2$ y $\Phi=1$ en el Teorema 1.3 de [58], obtenemos lo que se desea. ■

Lema 3.8.6. Sea $n\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ tal que para algunos $C^*>0$ y $\theta^*>0$ se satisface la desigualdad

$$\|n\|_{C^{\theta^*,\frac{\theta^*}{2}}(\overline{\Omega}\times[t,t+1])}\leq C^*.$$

Supongamos que

$$\int_0^\infty\int_\Omega(n(x,t)-N^*)^2dxdt<\infty \tag{3-77}$$

para alguna constante $N^*>0$. Entonces,

$$n(\cdot,t)\to N^* \text{ en } C^0(\overline{\Omega}) \text{ cuando } t\to\infty.$$

Demostración:

Definamos $n[j](x,s) := n(x, j+s)$ con $x \in \overline{\Omega}$ y $s \in [0,1]$. Veamos que el conjunto $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ es compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$. De la condición de Hölder, conseguimos que

$$|n[j](x_1,t_1) - n[j](x_2,t_2)| \leq C^*(|x_1-x_2|^{\theta^*}) + |t_1-t_2|^{\frac{\theta^*}{2}}),$$

para cada $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ y $j \in \mathbb{N}$. De lo cual, vemos que dado un $\varepsilon > 0$ existirá un $\delta > 0$ tal que si $(|x_1-x_2|^2 + |t_1-t_2|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$, entonces

$$|n[j](x_1,t_1) - n[j](x2, j_2)| < \varepsilon.$$

Luego $(n[j])_{j\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua. Usando el Teorema de Arzelà-Ascoli, $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ será, en efecto, compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$.
Razonando por reducción al absurdo, suponga que $n[j]$ no converge a N^* en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$ cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, existirá un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para una subsucesión $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ verificando $j_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ tenemos la desigualdad

$$\|n[j_k] - N^*\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} > \varepsilon_0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ es un conjunto compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$, entonces particularmente lo será $(n[j_k])_{k\in\mathbb{N}}$. De esta manera, existirán una subsucesión $(n[j_{k_r}])_{r\in\mathbb{N}}$ y una función $n_\infty \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$ tal que

$$\|n[j_{k_r}] - n_\infty\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} \to 0 \text{ cuando } r \to \infty. \tag{3-78}$$

Por la hipótesis (4-77), tenemos que

$$\int_0^1 \int_\Omega |n[j](x,s) - N^*|^2 dxds = \int_j^{j+1} \int_\Omega |n(x,t) - N^*|^2 dxdt \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Por otro lado, de (4-78) tenemos lo siguiente

$$\int_0^1 \int_\Omega |n[j_{k_r}](x,s) - n_\infty|^2 dxds \leq |\Omega| \|n[j_{k_r}] - n_\infty\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} \to 0 \text{ cuando } r \to \infty.$$

Por unicidad del límite se sigue que $n_\infty = N^*$. Por consiguiente, llegamos a una contradicción puesto que la convergencia (4-78) contradice la desigualdad (4.8). En particular

$$\sup_{s\in[0,1]} \|n[j](\cdot,s) - N^*\|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Entonces, $n(\cdot,t) \to N^*$ en $C^0(\overline{\Omega})$ cuando $t \to \infty$. ■

Lema 3.8.7. Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, tenemos que

1. Si $a_1, a_2 \in (0,1)$, entonces

   $$\|n_1(\cdot,t) - N_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \quad \|n_2(\cdot,t) - N_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty,$$

   donde $N_1^* := \frac{1-a_1}{1-a_1a_2}$, $N_2^* := \frac{1-a_2}{1-a_1a_2}$.

2. Si $a_1 \geq 1 > a_2$, entonces

   $$\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \|n_2(\cdot,t) - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Demostración:

1) Asumamos que $a_1, a_2 \in (0,1)$. Del Lema 4.8.2, tenemos que

- $\displaystyle\int_0^\infty \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 \leq C_{31}$,
- $\displaystyle\int_0^\infty \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 \leq C_{31}$.

Las hipótesis del Lema 4.8.6 son garantizadas gracias al Lema 4.8.5. Por lo tanto, para $i = 1, 2$, vemos que

$$n_i(\cdot, t) \to N_i^* \text{ en } C^0(\overline{\Omega}) \text{ cuando } t \to \infty.$$

2) Para el caso $a_1 \geq 1 > a_2$, usamos el Lema 4.8.4 y procedemos de manera similar al primer caso. ∎

Lema 3.8.8. Sea $a_2 \in (0,1)$. Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.1, tenemos que para todo $C \in (0, |\Omega| \min\{N_2^*, 1\})$ existirá un $T > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq C \text{ para todo } t > T.$$

Demostración:

Si $a_1, a_2 \in (0,1)$, entonces del Lema 4.8.7 vemos que

$$\int_\Omega n_2 \to \int_\Omega N_2 = N_2|\Omega| \text{ cuando } t \to \infty.$$

De lo anterior, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existirá $T_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq N_2|\Omega| - \varepsilon \text{ para todo } t > T_1.$$

En caso de que $a_1 \geq 1 > a_2$, tendremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $T_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq |\Omega| - \varepsilon \text{ para cada } t > T_2.$$

∎

3.9. Sobre la estabilidad de la concentración química

Lema 3.9.1. Para $\alpha, \beta, n_1, n_2, c$ satisfaciendo el sistema (4.2.1), tenemos que

$$\int_0^\infty (\alpha n_1 + \beta n_2) c < \infty.$$

Demostración:

Integrando la tercera ecuación del sistema (4.2.1) sobre Ω, haciendo uso de las fórmulas de Green y de la integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega c &= -\int_\Omega u\cdot\nabla c + \int_\Omega \Delta c - \int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c\\ &= \int_\Omega c\nabla\cdot u + \int_{\partial\Omega}\partial_\nu c - \int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c\\ &= -\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c.\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,t)$ en la anterior desigualdad, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo y usando el hecho de que $c>0$, conseguimos que

$$-\int_0^t\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c = \int_0^t\frac{d}{dt}\int_\Omega c = \int_\Omega c(\cdot,t) - \int_\Omega c_0 \geq -\int_\Omega c_0.$$

Y así,

$$\int_0^t\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c \leq \int_\Omega c_0 < \infty.$$

■

Lema 3.9.2. Existe una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$ tal que $t_k\to\infty$ y

$$\int_{t_k}^{t_k+1}\int_\Omega c \to 0 \text{ cuando } k\to\infty. \tag{3-79}$$

Demostración:

Del Lema 4.9.1, tenemos que

$$\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c \to 0 \text{ cuando } j\to\infty.$$

Denotemos por $f(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega c(\cdot,t)dx$ para cada $t>0$, entonces

$$\begin{aligned}\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c &= \underbrace{\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)(c(\cdot,t)-f(t))dxdt}_{:=I_1(j)}\\ &+\underbrace{\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)f(t)dxdt}_{I_2(j)}.\end{aligned} \tag{3-80}$$

Por la desigualdad de Cauchy podemos estimar a $I_1(j)$

$$I_1(j) \leq \left(\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_j^{j+1}\int_\Omega|c(\cdot,t)-f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.
Por la Desigualdad de Poincare-Wirtinger conseguimos una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega |c(\cdot,t) - f(t)|^2 \, dxdt \leq C_1 \int_j^{j+1} \int_\Omega |\nabla c(\cdot,t)| \, dxdt.$$

Por el Lema 4.7.2, vemos que

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega |\nabla c|^2 \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{3-81}$$

Y por el Lema 4.7.1, conseguimos

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_j^{j+1} \int_\Omega n_i^2 < \infty. \tag{3-82}$$

Por lo tanto, de (4-80) observamos que $I_2(j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.
Definamos $\overline{n_0} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega n_0 > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} I_2(j) &:= \int_j^{j+1} \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) f(t) dxdt \\ &= \int_j^{j+1} f(t) \left(\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Por los Lemas 4.8.7 y 4.8.8 conseguimos que, necesariamente,

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega c(x,t) dxdt \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Luego, vemos que la sucesión $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$, donde $c_j(x,s) := c(x, j+s)$ para cada $(x,s) \in \Omega \times (0,1)$ y $j \in \mathbb{N}$, satisface $c_j \to 0$ en $L^1(\Omega \times (0,1))$ cuando $j \to \infty$. Entonces, podemos tomar una subsucesión $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $j_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y satisfaciendo $c_{j_k} \to 0$ c.t.p en $\Omega \times (0,1)$ cuando $k \to \infty$. Además, por el Lema 4.7.2 sabemos que $(c_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(\Omega \times (0,1))$. Así, por el Teorema 2.1.17 de la Convergencia Dominada conseguimos que $c_{j_k} \to 0$ en $L^1(\Omega \times (0,1))$ cuando $k \to \infty$, con lo cual garantizamos (4-79) al tomar $t_k := j_k$.

Lema 3.9.3. Existe una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ tal que $t_k \to \infty$ y

$$\int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Demostración:

Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_k \to \infty$. Por el Lema 4.7.2, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{t_k}^{t_k+1} \int_\Omega |\nabla c|^4 \leq C_1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} + C_2 \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \tag{3-83}$$

para cada $\varphi \in W^{1,4}(\Omega)$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y fijemos $\delta > 0$ tal que $C_1^{\frac{1}{4}}\delta < \varepsilon$. Usando la desigualdad de Young con parámetros $p = \frac{5}{4}$ y $q = 5$, vemos que

$$\begin{aligned} C_2 \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} &= C_2 \left\| \frac{5}{4C_2} \delta \nabla\varphi \right\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}} \left\| \left(\frac{4C_2}{5\delta} \right)^4 \varphi \right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{5}} \\ &\leq \delta \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{5} \left(\frac{4C_2}{5\delta} \right)^4 \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (4-83), conseguimos $C_3 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)} + C_3 \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}$$

para cada $\varphi \in W^{1,4}(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt \leq& \delta \int_{t_k}^{t_k+1} \|\nabla c(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)} dt + C_3 \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} dt \\ \leq& \delta \left(\int_{t_k}^{t_k+1} \|\nabla c(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} + C_3 \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} dt \\ \leq& \delta C_1^{\frac{1}{4}} + C_3 \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} dt, \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta lo anterior y usando el Lema 4-79, obtenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt < \varepsilon + C_3 \limsup_{k\to\infty} \int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} dt = \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Esto demuestra lo deseado. ■

Lema 3.9.4. Tenemos que

$$\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \tag{3-84}$$

Demostración:

Como consecuencia del Lema 4-79 tenemos que $\liminf_{t\to\infty} \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$. Por el Lema 4.7.2 sabemos que la función $t \to \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es decreciente en $(0,\infty)$, consiguiéndose (4-84), como queríamos. ■

3.10. Sobre la estabilidad de la velocidad del fluído

Lema 3.10.1. Para $p \geq 2$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_1^\infty \int_\Omega (n_i + 1)^{p-2} |\nabla n_i|^2 < \infty \text{ con } i = 1, 2. \tag{3-85}$$

Demostración:

Bastaría demostrar este resultado para $p > 2$ ya que por estimativas clásicas $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Así, $\frac{4p}{p-1} < 8$. Por lo tanto, podemos tomar $\delta \in (0, \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)})$ lo suficientemente pequeño tal que

$$p\chi_1\delta < 2 \tag{3-86}$$

y

$$p(p-1)\chi_1^2\delta^2 + \frac{4p}{p-1} < 8. \tag{3-87}$$

Usando (4-84), podemos tomar un t_0 lo suficientemente grande, tal que

$$c \leq \frac{\delta}{2} \text{ en } \Omega \times (t_0, \infty).$$

Luego, $\frac{(n_1+1)^p}{\delta - c}$ está bien definido y es suave sobre $\overline{\Omega} \times [t_0, \infty)$. Además, tomando $t > t_0$ y usando la primera y tercera ecuación de nuestro sistema (4-1), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{\delta - c} &= \int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}(n_1)_t + \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta - c)^2} c_t \\ &= \int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}(\Delta n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2)) \\ &\quad + \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta - c)^2}(\Delta c - u \cdot \nabla c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c). \end{aligned} \tag{3-88}$$

Ahora, procedemos a analizar cada término del lado derecho de la anterior igualdad. Por las fórmulas de Green sabemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\Delta n_1 &= -p\int_\Omega \nabla\left(\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\right) \cdot \nabla n_1 \\ &= -p(p-1)\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta - c}|\nabla n_1|^2 - p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{(\delta - c)^2}\nabla n_1 \cdot \nabla c. \end{aligned} \tag{3-89}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} -p\chi_1\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\nabla \cdot (n_1\nabla c) &= p\chi_1\int_\Omega n_1\nabla\left(\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\right) \cdot \nabla c \\ &= p(p-1)\chi_1\int_\Omega \frac{n_1(n_1+1)^{p-2}}{\delta - c}\nabla n_1 \cdot \nabla c + p\chi_1\int_\Omega \frac{n_1(n_1+1)^{p-1}}{(\delta - c)^2}|\nabla c|^2. \end{aligned} \tag{3-90}$$

Razonando de manera análoga notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}\Delta c =& -\int_\Omega \nabla\left(\frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}\right)\cdot\nabla c\\ =& -p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{(\delta-c)^2}\nabla n_1\cdot\nabla c - 2\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^3}|\nabla c|^2.\end{aligned} \tag{3-91}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla\cdot u = 0$ e integrando por partes conseguimos que

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{p(n_1+1)^p}{\delta-c}u\cdot\nabla n_1 =& -\int_\Omega \frac{\nabla(n_1+1)^p}{\delta-c}\cdot u\\ =& \int_\Omega (n_1+1)^p\nabla\cdot\left(\frac{1}{\delta-c}u\right)\\ =& \int_\Omega (n_1+1)^p u\cdot\nabla\frac{1}{\delta-c}\\ =& \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}u\cdot\nabla c.\end{aligned} \tag{3-92}$$

Entonces, teniendo en cuenta las igualdades (4-89), (4-90), (4-91) y (4-92), conseguimos de (4-88) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(n+1)^p}{\delta-c} \leq& -p(p-1)\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2\\ &-\int_\Omega (n_1+1)^p\left(\frac{2}{(\delta-c)^3}-\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}\right)|\nabla c|^2\\ &+\int_\Omega (n_1+1)^{p-1}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c\\ &+\mu_1 p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1.\end{aligned} \tag{3-93}$$

Observemos que

$$\frac{\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}}{\frac{2}{(\delta-c)^3}} = \frac{p\chi_1 n_1(\delta-c)}{2(n_1+1)} \leq \frac{p\chi_1\delta}{2} < 1,$$

de lo cual vemos que el término que involucra a $|\nabla c|^2$ necesariamente es no positivo.
Por simplicidad, vamos a definir la función auxiliar

$$h(\eta,\xi) := \frac{\left(\frac{p(p-1)\chi_1\eta}{(\delta-\xi)(\eta+1)}-\frac{2p}{(\delta-\xi)^2}\right)^2}{4\left(\frac{2}{(\delta-\xi)^3}-\frac{p\chi_1\eta}{(\eta+1)(\delta-\xi)^2}\right)}$$

con $\eta\geq 0$ y $\xi\in[0,\delta)$.
Utilizando la desigualdad de Cauchy con

$$\varepsilon_0 = \frac{\frac{2}{(\delta-c)^3}-\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}}{\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{\delta-c}\right)^2},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (n_1+1)^{p-1}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c\\
&=\int_\Omega \left[(n_1+1)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla c\right]\cdot\left[(n_1+1)^{\frac{p-2}{2}}\nabla n_1\right]\\
&\leq \int_\Omega (n_1+1)^p\left(\frac{2}{(\delta-c)^3}-\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}\right)|\nabla c|^2\\
&\quad+\int_\Omega (n_1+1)^{p-2}h(n_1,c)\nabla n_1.
\end{aligned} \tag{3-94}$$

Realizando unos cálculo simples conseguimos ver que

$$\frac{h(\eta,\xi)}{\frac{p(p-1)}{\delta-\xi}}=\frac{p(p-1)\chi_1^2(\delta-\xi)^2\frac{\eta}{(\eta+1)^2}-4p\chi_1(\delta-\xi)\frac{\eta}{\eta+1}+\frac{4p}{p-1}}{8-4p\chi_1(\delta-\xi)\frac{\eta}{\eta+1}}:=\frac{h_1(\eta,\xi)}{h_2(\eta,\xi)}.$$

Por (4-87), observamos que

$$\begin{aligned}
h_1(\eta,\xi)-h_2(\eta,\xi)&=p(p-1)\chi_1^2(\delta-\xi)^2\frac{\eta^2}{(\eta+1)^2}+\frac{4p}{p-1}-8\\
&\leq p(p-1)\chi_1^2\delta^2+\frac{4p}{p-1}-8<0.
\end{aligned}$$

Además, por (4-86),

$$h_2(n,c)\geq 8-4p\chi_1\delta>0 \ \text{ en } \Omega\times(t_0,\infty),$$

de lo cual notamos que

$$\frac{h_1(n,c)}{h_2(n,c)}\leq 1-\underbrace{\frac{8-p(p-1)\chi_1^2\delta^2-\frac{4p}{p-1}}{8-4p\chi_1\delta}}_{:=C_1}. \tag{3-95}$$

De (4-92), (4-94) y (4-95) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{(n+1)^p}{\delta-c}\leq -p(p-1)C_1\int_\Omega\frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2+\mu_1 p\int_\Omega\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1$$

para todo $t>t_0$.

Integrando sobre (t_0,t) en la anterior desigualdad y usando el Teorema Fundamental del Cálculo llegamos a que

$$\begin{aligned}
p(p-1)C_1\int_{t_0}^t\int_\Omega\frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2\leq&\int_\Omega\frac{(n_1+1)^p(x,t_0)}{\delta-c(c,t_0)}dx+\mu_1 p\int_{t_0}^t\int_\Omega\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1\\
&-\int_\Omega\frac{(n_1+1)^p(x,t)}{\delta-c(c,t)}dx.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta el Lema 4.7.6 y usando el Lema 4.7.7 tendríamos una cota C_2 para la parte derecha de la anterior desigualdad. Más aún, teniendo en cuenta que $\frac{1}{\delta-c} \leq \frac{1}{\delta}$, vemos que

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}(n_1+1)^{p-2}|\nabla n_1|^2 \leq \frac{\delta C_2}{p(p-1)C}.$$

De lo anterior y teniendo en cuenta que n es acotada y suave en $\overline{\Omega}\times[1,t_0]$, demostramos lo deseado.

■

Lema 3.10.2. La función u del sistema (4-1) cumple la convergencia

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t\to\infty. \tag{3-96}$$

Además,

$$\int_1^{\infty}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 < \infty. \tag{3-97}$$

Demostración:

Multiplicando por u a la cuarta ecuación de (4-1), integrando sobre Ω y usando los razonamientos hechos en (4-38), (4-40) y (4-41), vemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u|^2 + \int_{\Omega}|\nabla u|^2 = \int_{\Omega}(\gamma n_1+\delta n_2)\nabla\phi\cdot u. \tag{3-98}$$

Del razonamiento hecho en (4-42) tenemos que

$$\int_{\Omega}(\gamma n_1+\delta n_2)\nabla\phi\cdot u = -\int_{\Omega}\phi u\cdot\nabla(\gamma n_1+\delta n_2)$$

para cada $t>0$. Ahora, de la desigualdad de Poincare, existe $C_1>0$ tal que

$$\int_{\Omega}|u|^2 \leq C_1\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \tag{3-99}$$

para todo $t>0$. Luego, usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon=\frac{C_1}{2}$, tenemos

$$-\int_{\Omega}\phi u\cdot\nabla(\gamma n_1+\delta n_2) \leq \frac{1}{2C_1}\int_{\Omega}|u|^2 + C_2\int_{\Omega}|\nabla(\gamma n_1+\delta n_2)|^2,$$

donde $C_2 := \frac{C_1\|\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2}$. De (4-99) y por la desigualdad anterior notamos que

$$-\int_{\Omega}\phi u\cdot\nabla(\gamma n_1+\delta n_2) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 + C_2\int_{\Omega}|\nabla(\gamma n_1+\delta n_2)|^2$$

Reemplazando en (4-98) conseguimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 \leq C_2\int_{\Omega}|\nabla(\gamma n_1+\delta n_2)|^2$$

para todo $t > 0$. Integrando la anterior desigualdad sobre $(1, t)$ con $t > 1$ y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2 - \int_\Omega |u(\cdot,1)|^2\right) + \frac{1}{2}\int_1^t \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq C_2 \int_1^t \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2 \\ &\leq C_2 \int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2.\end{aligned}$$

Dada la no negatividad del término $\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2$, de lo anterior obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_1^t \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u(\cdot,1)|^2 + C_2 \int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2.$$

Por el Lema 4.10.1 con $p = 2$, vemos que

$$\int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2 < \infty, \tag{3-100}$$

de lo cual implica (4-97) como se quería. Por otro lado, sea $y(t) := \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ con $t \geq 0$ y definamos $h(t) := 2C_2 \int_\Omega |\nabla n(x,t)|^2 dx$ con $t > 0$ y denotemos $C_3 := \frac{1}{C_1}$. Entonces,

$$y'(t) \leq -C_3 y(t) + h(t)$$

para todo $t > 0$. Ahora, tomemos $t > 1$ y fijemos $s \in (1, t)$, entonces

$$y'(s)e^{-C_3(t-s)} \leq -C_3 y(s) e^{-C_3(t-s)} + e^{-C_3(t-s)} h(s).$$

Como $\left(y(s)e^{-C_3(t-s)}\right)' = y'(s)e^{-C_3(t-s)} + C_3 y(s) e^{-C_3(t-s)}$, vemos que

$$(y(s)e^{-C_3(t-s)})' \leq e^{-C_3(t-s)} h(s).$$

Integrando la anterior desigualdad sobre $(1, t)$ y aplicando el Teorema Fundamental del Calculo tenemos que

$$y(t) \leq e^{-C_3(t-1)} y(1) + \int_1^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds.$$

Si tomamos $t > 2$, observamos que

$$\begin{aligned}\int_1^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds &= \int_1^{\frac{t}{2}} e^{-C_3(t-s)} h(s) ds + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds \\ &\leq e^{-\frac{C_3 t}{2}} \int_1^\infty h(s) ds + \int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) ds.\end{aligned}$$

Sabemos que $\int_1^\infty h(s)ds < \infty$ por (4-100), garantizándose así que $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ como se quería. ■

Lema 3.10.3. La función u del sistema (4-1) verifica

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty. \tag{3-101}$$

Demostración:

Dado que $W^{1,r}(\Omega)$ está compactamente embebido en $L^\infty(\Omega)$ para todo r y como $L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, entonces aplicando la desigualdad de Ehrling conseguimos que para $\delta > 0$ existirá una constante $C(\delta) > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,r}(\Omega)} + C(\delta)\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $t > 0$.
Tomando $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño y teniendo en cuenta la convergencia conseguida en (4-96), bastaría demostrar que la función $t \to \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,r}(\Omega)}$ es acotada y conseguiríamos (4-101). Para tal fin, tomemos $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha > 1 - \frac{1}{r}$. Entonces, $\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$. Por lo tanto, podemos fijar $p \in (1,2)$ lo suficientemente cercano a 2 tal que

$$\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > \frac{1}{p}.$$

Podemos ahora considerar el operador de Stokes A con dominio $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\sigma(\Omega)$. Entonces, tomando el α definido anteriormente, vemos que $D(A^\alpha) \hookrightarrow W^{1,r}(\Omega)$. Luego, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C_1 \|A^\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega)}, \tag{3-102}$$

para todo $\varphi \in D(A^\alpha)$. Reescribiendo la cuarta ecuación del sistema (4-1) como

$$u_t = \Delta u + \nabla P + \underbrace{\left(\underbrace{-(u\cdot\nabla)u}_{:=h_1(x,t)} + \underbrace{(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi}_{:=h_2(x,t)} \right)}_{:=h(x,t)}.$$

Ahora observemos que del Lema 4.7.7 podemos acotar la función h_2 por una constante $C_2 > 0$ como sigue

$$\|h_2(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2,$$

para cada $t > 1$. De igual forma, usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{2}{p} > 1$ y $\frac{2}{2-p}$, la desigualdad de Cauchy, la inclusión $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{2-p}}(\Omega)$ y el Lema 4-96, garantizamos acotar la función h_1 por una constante $C_3 > 0$ como sigue

$$\begin{aligned}
\|h_1(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq& \|\left[(u\cdot\nabla)u\right](\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \\
=& \||u\cdot\nabla u|^p(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
=& \|\left(|u|^p|\nabla u|^p\right)(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
\leq& \|u(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq& \, C_3,
\end{aligned}$$

para todo $t > 1$. Ahora, recordemos que al usar la fórmula de variación de parámetros con $k \geq 1$ un entero arbitrario y $t > k$ vemos que

$$u(\cdot,t) = e^{-(t-k)A}u(\cdot,k) + \int_k^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[h](\cdot,s)ds. \tag{3-103}$$

Así mismo, sabemos que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-tA}\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 t^{-\alpha}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \tag{3-104}$$

para cada $\varphi \in L^p_\sigma(\Omega)$ y para todo $t > 0$. Empleando estos hechos, recordando que $\mathbb{P}$ es un operador acotado de $L^p(\Omega)$ a $L^p_\sigma(\Omega)$, aplicando A^α a cada lado de (4-103) y utilizando la desigualdad (4-104), obtenemos que

$$\|A^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4(t-k)^{-\alpha}\|u(\cdot,k)\|_{L^p(\Omega)} + C_4\int_k^t (t-s)^{-\alpha}\|h(\cdot,s)\|_{L^p(\Omega)}ds, \tag{3-105}$$

para cada $t > k$. De ahí, sabemos por el Lema 4.10.2 y del hecho que $p < 2$, que $C_5 := \sup_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}$ es finito. Entonces, de (4-105) tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq & C_4C_5(t-k)^{-\alpha} + C_4\left(C_2 + C_3\right)\int_k^t (t-s)^{-\alpha}ds \\ \leq & C_4C_5 + C_4(C_2 + C_3)\cdot\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

para todo $t \in [k+1, k+2]$. Por lo tanto, como $k \geq 1$ fue arbitrario y teniendo en cuenta la desigualdad (4-102), conseguimos que el mapeo $t \to \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,r}(\Omega)}$ sea acotado, culminando la demostración. ■

Prueba del Teorema 4.2.2

Observemos que los Lemas (4.8.7), (4-84) y (4.10.3) implican directamente el Teorema 4.2.2. Esto concluye la prueba.

Capítulo 4

Modelo de Quimiotaxis

4.1. Presentación del modelo

En esta sección nos centraremos en demostrar la existencia global, unicidad, acotamiento, regularidad y propiedades de estabilidad sobre el siguiente modelo

$$\begin{cases} (n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ (n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi, \ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_v n_1 = \partial_v n_2 = \partial_v c = 0 \ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ n_1(\cdot, 0)) := n_{1,0}, \ n_2(\cdot, 0)) := n_{2,0}, \ c(\cdot, 0) := c_0, \ u(\cdot, 0) := u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4-1}$$

El anterior sistema describe la concentración de dos especies que reaccionan a un único fluido quimioatrayente. La solución a este sistema la denotaremos como la tupla de funciones (n_1, n_2, c, u, P) las cuales se encuentran definidas en $\Omega \times [0, \infty)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. En este modelo n_1 y n_2 representan las densidades de las dos especies, c denota la concentración del químico, u representa el campo vectorial de la velocidad del fluido, el cual asumimos incompresible, y la función incógnita P denota la presión del fluido, respectivamente.

Por otro lado, suponemos como conocidos los valores iniciales que tomará la tupla (n_1, n_2, c, u), los cuales por comodidad denotaremos por $(n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0)$. Consideraremos que los datos iniciales presentan la siguiente regularidad para nuestro sistema

$$0 < n_{1,0}, n_{2,0} \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < c_0 \in W^{1,q}(\Omega), \quad \text{y } u_0 \in D(A^\theta),$$

donde $q > 2$ y $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Así mismo, asumiremos como conocidas a la función $\phi \in C^{1+\eta}(\Omega)$ con $\eta > 0$, a las constantes no-negativas χ_1, χ_2, a_1, c_2 y a las constantes positivas μ_1, μ_2, α, β, γ y δ. Estas constantes del modelo corresponden a ciertos ratios que describiremos a continuación. Invocando las tres primeras ecuaciones del sistema (4-1)

$$\begin{aligned}
&(n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2),\\
&(n_2)_t + u \cdot \nabla n_2 = \Delta n_2 - \chi_2 \nabla \cdot (n_2 \nabla c) + \mu_2 n_2 (1 - a_2 n_1 - n_2),\\
&c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c.
\end{aligned}$$

Observamos que los términos señalados en azul en la primer y segunda ecuación corresponden a una cinética de tipo Lotka-Volterra. Esto nos indica que las ecuaciones involucradas modelan dos especies compitiendo en base a un mismo estímulo químico, donde μ_1 y μ_2 representan los ratios de crecimiento de cada especie y a_1 y a_2 corresponden a la fuerza de la competencia entre la especie I y la especie II.

Los parámetros χ_1 y χ_2 señalados en rojo, corresponden a sensitividades quimiotácticas las cuales describen cuantitativamente la dispersión y el movimiento dirigido de poblaciones de microorganismos (ver por ejemplo [21] y [22]).

Además, dado que los términos que involucran el Laplaciano (términos de difusión) están acompañados por una constante idéntica a 1, esto nos indicará que el ratio de difusión de las especies y el fluido quimioatrayente es idéntico a 1, un análisis similar se realizó en [23].

En la tercera ecuación tenemos el término señalado en verde, el cual se refiere al transporte del fluído quimioatrayente y el término indicado en naranja, el cual consta de constantes α, β que representan el decaimiento de la señal química, este término es frecuentemente denominado como el término del consumo. De esta ecuación podemos inferir que la evolución de la concentración del fluido quimioatrayente es influenciado por la difusión, el transporte a través del campo vectorial de la velocidad del fluído y el consumo de dicho quimioatrayente, el cual será proporcional a la cantidad de microorganismo existentes en el medio.
Ahora centremos nuestro análisis a la cuarta ecuación de nuestro sistema (4-1), es decir,

$$u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi.$$

Esta ecuación está acompañada por la condición $\nabla \cdot u = 0$ y es básicamente una ecuación diferencial de Navier-Stokes incompresible, la cual describe el movimiento del fluido. Ella contiene un término, señalado en azul, que involucra a la función ϕ la cual nos indica un potencial gravitatorio que influye sobre el fluido, esto corresponde a una fuerza externa a considerar en el modelo. Además, el término señalado en rojo corresponde a la aceleración total de una partícula en el fluido y el término que involucra el Laplaciano nos indica la fricción entre partículas del fluido.

4.2. Teoremas principales

Nuestro principal objetivo a partir de ahora será demostrar rigurosamente dos teoremas, el primero trata sobre la existencia de soluciones clásicas en (4-1) y postula la unicidad y acotamiento de dichas soluciones:

Teorema 4.2.1. (Existencia, unicidad y acotamiento)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera suave y suponga $\chi_1, \chi_2, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ y $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, asumamos que $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0, \phi$ son funciones dadas que satisfacen (4.1) Entonces existen funciones

$$\begin{aligned}
n_1, n_2 \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),\\
c \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),\\
u \in & C^0((\overline{\Omega}) \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),\\
P \in & C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)),
\end{aligned}$$

las cuales solucionan el sistema (4-1) de forma clásica. Más aún, el sistema tiene una única solución (n_1, n_2, c, u, P) salvo adición de contantes a P, y existe una constante $C_1 > 0$ tal que para $t > 0$ verifica que

$$\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1.$$

Nuestro segundo teorema nos da unos resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones (4-1) bajo ciertas suposiciones sobre los coeficientes a_1, a_2:

Teorema 4.2.2. (Estabilidad de la solución)
Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, las soluciones del sistema (4-1) tienen las siguientes propiedades:

1. Si $a_1, a_2 \in (0,1)$ entonces

   $$n_1(\cdot,t) \to N_1^*, \quad n_2(\cdot,t) \to N_2^*, \quad c(\cdot,t) \to 0, \quad u(\cdot,t) \to 0 \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } t \to \infty,$$

   donde

   $$N_1^* := \frac{1-a_1}{1-a_1a_2}, \quad N_2^* := \frac{1-a_2}{1-a_1a_2}.$$

2. Suponga que $a_1 \geq 1 > a_2$ entonces

   $$n_1(\cdot,t) \to 0, \quad n_2(\cdot,t) \to 1, \quad c(\cdot,t) \to 0, \quad u(\cdot,t) \to 0 \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } t \to \infty.$$

4.2.1. Síntesis de las pruebas

Para demostrar este par de resultados, seguiremos la siguiente ruta

1. Probaremos que existen ciertas soluciones locales con un método clásico basado en el Teorema del Punto Fijo de Banach.

2. Conseguiremos la regularidad de la solución.
3. Se demostrará por medio de un argumento clásico Bootstrap, que las soluciones son globales o necesariamente no son acotadas.
4. Probaremos la no negatividad y con un argumento del principio del máximo, mostraremos la positividad de las soluciones n_1, n_2, c.
5. Conseguiremos la unicidad de la solución.
6. Se conseguirá el acotamiento de la solución por medio de una serie de lemas, teniendo en cuenta el ítem 2 conseguiríamos la solución global y culminaría el Teorema 4.2.1.
7. Probaremos una serie de lemas que nos permitirán encontrar condiciones para las cuales n_1, n_2 se estabilizan con el tiempo.
8. Demostraremos finalmente que bajo ciertas condiciones c, u se vuelven despreciables con tiempos grandes, con lo cual se finalizaría el Teorema 4.2.3.

Teniendo en cuenta los ítems 1, 2, 3, 4 y 5 procedemos a postular el siguiente lema el cual expresa de manera rigurosa nuestros primeros cinco objetivos.

Lema 4.2.3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}$ un dominio acotado con frontera suave, $\chi_1, \chi_2, a_1, a_2 \geq 0$ y $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ constantes. Para todo $n_{1,0}, n_{2,0}, c_0, u_0, \phi$ que satisfacen (4.1), entonces existen $T_{max} \in (0, \infty]$ y una solución clásica (n_1, n_2, c, n, P) de nuestro modelo (4-1) en $\Omega \times (0, T_{max})$ tal que

$$\begin{aligned}
&n_1, n_2, c, u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}]),\\
&n_1, n_2 > 0, c > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \times (0, T_{max}).
\end{aligned}$$

Además, la solución es única, salvo adición de constantes a P, y $T_{max} = \infty$ o

$$\lim_{t \to T_{max}} (\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}) = \infty,$$

para todo $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$.

4.3. Existencia y regularidad de las soluciones en el modelo

Para demostrar la existencia de las soluciones vamos a usar un razonamiento clásico que involucra el Teorema de Punto Fijo de Banach. A continuación, vamos a especificar cierto espacio de Banach y cierto mapeo que nos permitirá implementar dicha técnica.

4.3.1. Espacio de solución local y mapeo de punto fijo

Vamos a fijar de manera momentánea las constantes $R > 0$ y $T > 0$, las cuales se especificarán más adelante. Considere el espacio

$$X = C^0([0,T); C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)),$$

al cual se le define la norma:

$$\| \cdot \|_X = \| \cdot \|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \| \cdot \|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \| \cdot \|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} + \| \cdot \|_{C^0([0,T);D(A^\theta))}.$$

Ahora, definamos la bola cerrada de radio R en X:

$$S = \{(n_1, n_2, c, u) \in X \ : \ \|(n_1, n_2, c, u)\|_X \leq R\}.$$

Motivados por la fórmula de variación de parámetros, vamos a considerar ahora el mapeo sobre S, definido como

$$\Phi(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t) := \begin{pmatrix} \Phi_1(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t) \\ \Phi_2(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t) \\ \Phi_3(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t) \\ \Phi_4(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t\Delta}n_{1,0} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2) - (u\cdot\nabla n_1 + \chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c))(\cdot,s)ds \\ e^{t\Delta}n_{2,0} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_2 n_2(1-a_2n_1-n_2) - (u\cdot\nabla n_2 + \chi_2\nabla\cdot(n_2\nabla c))(\cdot,s)ds \\ e^{t\Delta}c_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot,s)ds \\ e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u)(\cdot,s)ds \end{pmatrix},$$

donde $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ y $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ son el Semigrupo del Calor y el Semigrupo de Stokes, respectivamente.

4.3.2. $\Phi(S) \subseteq S$ y Φ es contractiva

Nuestro objetivo actual será demostrar que Φ mapea a S en S para ciertos valores de R y $T > 0$ que especificaremos más adelante. Además, mostraremos que Φ es una función contractiva.

$\Phi(S) \subseteq S$

Notemos que $u \cdot \nabla n_1 = \nabla \cdot (n_1 u)$, entonces observe que $u \cdot \nabla n_1 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) = \nabla \cdot (n_1 u + \chi_1 n_1 \nabla c)$. Denotando por f a la expresión $n_1 u + \chi_1 n_1 \nabla c$ y aplicando la norma de $C^0(\Omega)$, tenemos que Φ es acotado como sigue:

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)}\\
&=\left\|e^{t\Delta}n_{1,0}+\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)ds\right\|_{C^0(\Omega)}\\
&\leq \left\|e^{t\Delta}n_{1,0}\right\|_{C^0(\Omega)}+\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)ds\right\|_{C^0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Recordemos que $\|\cdot\|_{C^0(\Omega)}=\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ para cada elemento en $C^0(\Omega)$. Además,

$$\|e^{t\Delta}n_{1,0}\|\leq\|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}exp\left(\frac{|\xi|^2}{4t}\right)d\xi=\|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ahora, usando la inmersión $D((-\Delta+1)^{\beta_1})\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ para $m=0$, $p=\infty$, $\beta_1\in\left(\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right)$ y $q\in(2,\infty)$ en 2.7.16, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)ds\right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&=\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)\|_{W^{0,\infty}(\Omega)}ds\\
&\leq c_{0,\infty}\int_0^t\|(-\Delta+1)^{\beta_1}e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)\|_{L^q(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Se toma este valor para β_1 para asegurar que

$$\frac{1}{2}-\beta_1>0 \text{ y } -\beta_1+\frac{1}{2q}+1>0,$$

esto para garantizar que $T^{\frac{1}{2}-\beta_1}\to\infty$ cuando $T\to\infty$, esta observación será de vital importancia más adelante en la elección de R y $T>0$ con el fin de que Φ mapee a S en S.
Utilizando el segundo ítem del Teorema 2.7.17 se llega a:

$$\begin{aligned}
&c_{0,\infty}\int_0^t\|(-\Delta+1)^{\beta_1}e^{(t-s)\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)\|_{L^q(\Omega)}ds\\
&=c_{0,\infty}\int_0^t\|(-\Delta+1)^{\beta_1}e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)\|_{L^q(\Omega)}ds\\
&\leq c_{0,\infty}C_2\int_0^t\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1}\left\|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)-\nabla\cdot f)(\cdot,s)\right\|_{L^q(\Omega)}ds\\
&\leq c_{0,\infty}C_2\int_0^t\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1}\left\|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2))(\cdot,s)\right\|_{L^q(\Omega)}ds+\\
&+c_{0,\infty}C_2\int_0^t\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1}\left\|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla\cdot f)(\cdot,s)\right\|_{L^q(\Omega)}ds\\
&:=c_{0,\infty}C_2(I_1+I_2).
\end{aligned}$$

Note que la integral I_2 se logra acotar usando el tercer ítem del Teorema 2.7.17 como sigue

$$\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla\cdot f)(\cdot,s)\right\|_{L^q(\Omega)} ds$$
$$\leq C_4 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(\Omega)} ds.$$

Recordemos que $f = n_1 \cdot u + \chi_1 n_1 \nabla c$ y utilizando el Teorema 2.8.9, se sigue que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|n_1\|_{L^q(\Omega)}(\|u\|_{L^q(\Omega)} + \chi_1\|\nabla c\|_{L^q(\Omega)})\\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{q}}\|n_1\|_{L^\infty(\Omega)}(C(\Omega,2)\|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + \chi_1\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}),\end{aligned}$$

para $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$.
Con lo anterior, podemos asegurar que existe una constante $K_1^1(R) > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^{q_1}(\Omega)} \leq K_1^1(R).$$

En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned}C_4 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(\Omega)} ds &\leq C_4 K_1^1(R) \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1-\frac{1}{2}} ds\\ &\leq C_4 K_1^1(R) \frac{2^{\frac{3}{2}+\beta_1}}{1-2\beta_1} T^{\frac{1}{2}-\beta_1}.\end{aligned}$$

Ahora, estudiamos la integral I_1. Utilizando el Lema 2.7.17 y el hecho de que $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{0,q}(\Omega)}$, existe un $C_5 > 0$ que solo depende de q tal que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2))(\cdot,s)\right\|_{L^{q_1}(\Omega)} ds\\ &\leq C_5 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2))(\cdot,s)\right\|_{L^{q_1}(\Omega)} ds\\ &\leq C_5 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1} \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \|\mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2)\|_{L^q(\Omega)} ds\\ &\leq C_5 C_6(R) \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\beta_1-\frac{1}{2}} ds \leq C_7(R) T^{\frac{1}{2}-\beta_1},\end{aligned}$$

para algunos $C_6, C_7 > 0$.
En conclusión tenemos que:

$$\|\Phi_1(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)} \leq \|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)} + K_1(R) T^{\frac{1}{2}-\beta_1},$$

para alguna constante $K_1(R) > 0$.
Procediendo de manera similar para Φ_2, sabemos que existen una constante $K_2(R) > 0$ y $\beta_2 \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right)$ específicos tales que

$$\|\Phi_2(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)} \leq \|n_{2,0}\|_{L^\infty(\Omega)} + K_2(R) T^{\frac{1}{2}-\beta_2}.$$

Ahora, nos concentraremos en acotar Φ_3. Notemos que

$$\begin{aligned}\|\Phi_3(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} &= \left\| e^{t\Delta}c_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c)(\cdot,s)ds \right\|_{W^{1,q}(\Omega)} \\ &\leq \|e^{t\Delta}c_0\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Seleccionamos $q_1, q_2, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \frac{2q}{q(2\gamma-1)+2} < q_1, \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1 \ \ , \quad 0 < \delta < 1-\gamma \quad \text{y} \quad \frac{q_1}{\delta q_1 + 1} < q_2 < q.$$

Observe que $q(2\gamma-1)+2 \neq 0$, ya que $\frac{q-2}{2q} < \frac{1}{2} < \gamma$. Además, por el Lema 2.7.15, conseguimos la existencia de constantes $C_{1,q}, C_7, C_8 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{W^{1,q}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}\int_0^t \|(-\Delta+1)^{\gamma}e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{L^{q_1}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma} \|e^{\left(\frac{t-s}{2}\right)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c)(\cdot,s)\|_{L^{q_1}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7C_8\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma}\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\delta} \|u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy, la desigualdad de Hölder y la inclusión existente entre los espacios L^p (ver Teorema 2.4.12), conseguimos que existen constantes $R_1, R_2 > 0$ para las cuales se satisface que:

$$\begin{aligned}&\|u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)} \\ &\leq R_1\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^q(\Omega)} + R_1\|\alpha n_1+\beta n_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|c\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq R_2\|u\|_{D(A^\theta)}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)} + R_2\|\alpha n_1+\beta n_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que existe una constante $C_9(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&C_{1,q}C_7C_8\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{\gamma}\left(\frac{t-s}{2}\right)^{\delta} \|u\nabla c + (\alpha n_1+\beta n_2)c\|_{L^{q_2}(\Omega)}ds \\ &\leq C_{1,q}C_7C_8C_9(R)\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\gamma+\delta} ds \\ &\leq K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1}.\end{aligned}$$

Asimismo, existe una constante $C_{10} > 0$ tal que

$$\|\Phi_3(n_1,n_2,c,u)(\cdot,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq \left\|e^{t\Delta}c_0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)} + K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1} \leq C_{10}\left\|c_0\right\|_{W^{1,q}(\Omega)} + K_3(R)T^{-\gamma+\delta+1}.$$

Nuevamente, se observa que dada la elección de $\delta > 0$, tenemos que $T^{-\gamma+\delta+1} \to \infty$ cuando $T \to \infty$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\|A^\theta \Phi_4(n_1, n_2, c, u)\|_{L^2(\Omega)} \leq& \|A^\theta e^{-tA} u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} \mathbb{P}((\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u \cdot \nabla)u)(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &:= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Observe que por las propiedades del operador de Stokes y dado que el Semigrupo de Stokes tiene norma de operador idéntica a 1, se sigue que

$$J_1 = \|A^\theta e^{-tA} u_0\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-tA} A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por un lado, definamos $\xi = (\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u \cdot \nabla)u$. Dado que el operador $A^\theta e^{-t\theta}$ está acotado por $t^{-\theta}$ bajo la norma de los operadores lineales y como $\|\mathbb{P}\| \leq 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|A^\theta e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(\xi(\cdot, s))\|_{L^2(\Omega)} &\leq (t-s)^{-\theta} \|\mathbb{P}(\xi(\cdot, s))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (t-s)^{-\theta} \left(\|(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^2(\Omega)} \right).\end{aligned} \tag{4-2}$$

Aquí usamos la siguiente desigualdad $\|(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(\gamma n_1 + \delta n_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Por otro lado, si fijamos $n = 2$ en el Lema 2.8.3, entonces existirá una constante $C_{11} > 0$ tal que

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq (C_{11} \|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + C_8 \|u\|_{L^2(\Omega)})^2.$$

Además, debido a las inclusiones continuas $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$, se garantiza la existencia de una constante $C_{12} > 0$ tal que

$$(C_{11} \|A^\theta u\|_{L^2(\Omega)} + C_{11} \|u\|_{L^2(\Omega)})^2 \leq C_{12} \|A^\theta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Luego, por 4-2 y usando la desigualdad previa, conseguimos que

$$\|A^\theta e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(\xi(\cdot, s))\|_{L^2(\Omega)} \leq (t-s)^{-\theta} (\|(\gamma n_1 + \delta n_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + C_9 \|A^\theta u\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Dado que $\phi \in C^{1+\eta}(\overline{\Omega})$, tenemos que $\nabla\phi \in L^\infty(\Omega)$. Así, existe un $K_4(R) > 0$ tal que

$$\int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(\xi(\cdot, s))\|_{L^2(\Omega)} ds \leq K_4(R) T^{1-\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\|A^\theta \Phi_4(n_1, n_2, c, u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)} + K_4(R) T^{1-\theta}.$$

Observe que por hipótesis $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, de modo que $T^{1-\theta} \to \infty$ cuando $T \to \infty$. Ahora, por la Propiedad Arquimediana, existe un $N_R \in \mathbb{N}$ tal que $\text{máx}\{K_i : \ i = 1, 2, 3, 4\} < N_R$ y

$$\begin{aligned}\|\Phi(n_1, n_2, c, u)\|_X \leq& \|n_{1,0}\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + \|n_{2,0}\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} + C_{10} \|c_0\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\ &+ \|u_0\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))} + N_R (T^{\frac{1}{2}-\beta_1} + T^{\frac{1}{2}-\beta_2} + T^{-\gamma+\delta+1} + T^{1-\theta}).\end{aligned}$$

De lo anterior, tomando $R > 0$ suficientemente grande, dependiendo de $\|n_{1,0}\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|n_{2,0}\|_{L^\infty(\Omega)}$, $C_{10}\|c\|_{W^{1,q}(\Omega)}$, $\|A^\theta u_0\|_{L^2(\Omega)}$, y un $T > 0$ lo suficientemente pequeño conseguiríamos que en efecto $\Phi(S) \subseteq S$.

Φ es contractiva

Ahora vamos a demostrar que Φ es una función contractiva, para ello veamos que existe un $k \in (0,1)$ tal que dados $z_1 := (n_1^1, n_2^1, c^1, u^1)$, $z_2 := (n_1^2, n_2^2, c^2, u^2) \in S$ se verifica que

$$\|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\|_X \leq k\|z_2 - z_1\|_X.$$

Estudiando Φ_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(z_2) - \Phi_1(z_1)\\
&\quad= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\mu_1(1 - n_1^1 - a_1 n_2^1) - (u^1 \cdot \nabla n_1^1 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1^1 \nabla c^1))\\
&\qquad - \mu_1(1 - n_1^2 - a_1 n_2^2) + (u^2 \cdot \nabla n_1^2 + \chi_1 \nabla \cdot (n_1^2 \nabla c^2)))(\cdot, s)ds\\
&\quad= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)ds\\
&\qquad \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2) + \nabla \cdot ((n_1^1(u^1 + \chi_1 \nabla c^1)) - (n_1^2(u^2 + \chi_1 \nabla c^2))))(\cdot, s)ds\\
&\qquad := I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Definamos $\overline{f} = a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2) + \nabla \cdot ((n_1^1(u^1 + \chi_1 \nabla c^1)) - (n_1^2(u^2 + \chi_1 \nabla c^2)))$. Analizando I_2 y usando el primer postulado de (2.7.15) con $\eta_1 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$ y $q > 2$, vemos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\overline{f}(\cdot, s)ds \right\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\overline{f}\|_{L^\infty(\Omega)}(\cdot, s)ds\\
&\leq C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{(t-s)\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s)ds\\
&= C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s)ds.
\end{aligned}$$

Empleando los items 1 y 2 del Lema 2.7.15, observamos que existen $C_2, C_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
C_1 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s)ds &\leq C_2 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s)ds\\
&\leq C_3 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta + 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot, s)ds.
\end{aligned}$$

Notemos que tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$ en 4. del Lema (4.7.1) y utilizando 1. del mismo Lema, podemos concluir que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2))\|_{L^q(\Omega)} \\
&\quad + \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(\nabla\cdot(n_1^1(u^1+\chi_1\nabla c^1)) - (n_1^2(u^2+\chi_1\nabla c^2))\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_4\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\quad + \|n_1^1 \underbrace{(u^1+\chi_1\nabla c^1)}_{:=\phi_1} - n_1^2 \underbrace{(u^2+\chi_1\nabla c^2)}_{:=\phi_2}\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4-3}$$

Usando el hecho de que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$ y la naturaleza del conjunto S, garantizamos la existencia de constantes $C_5, C_6(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} &= \|a_1\mu_1(n_1^1 n_2^1 - n_1^2 n_2^1 + n_1^2 n_2^1 - n_1^2 n_2^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&= \|a_1\mu_1((n_1^1 - n_1^2)n_2^1 + (n_2^1 - n_2^2)n_1^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|n_2^1\|_{L^\infty(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + C_5\|n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq C_6(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + C_6(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|n_1^1\phi_1 - n_1^2\phi_2\|_{L^q(\Omega)} &= \|n_1^1\phi_1 - n_1^1\phi_2 + n_1^1\phi_2 - n_1^2\phi_2\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|n_1^1(\phi_1 - \phi_2) + \phi_2(n_1^1 - n_1^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_6(R)\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^q(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L^q(\Omega)}\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|(u^1+\chi_1\nabla c^1) - (u^2+\chi_1\nabla c^2)\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + \chi_1\|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\phi_2\|_{L^q(\Omega)} &= \|u^2 + \chi_1\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C_5\|u^2\|_{D(A^\theta)} + \chi_1\|c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)} \\
&\leq C_6(R).
\end{aligned}$$

Así, continuando con la estimativa de (4-3) al emplear las anteriores desigualdades, conseguimos la existencia de una constante $C_7(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)} \leq& C_7(R)\left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_1^1 - n_1^2\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&+ \|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + \|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $C_8(R) > 0$ verificando

$$\begin{aligned}
C_3\int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta+1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}\overline{f}\|_{L^q(\Omega)}(\cdot,s)ds &\leq C_7(R)\|z_2 - z_1\|_X \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\eta_1} ds \\
&\leq C_7(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|I_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_7(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X. \tag{4-4}$$

Procedamos a analizar I_1. Usando el mismo tratamiento previo tenemos que existen constantes $C_8, C_9, C_{10}, C_{11}(R), C_{12}(R) > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\
&\leq C_8 \int_0^t \|(-\Delta + 1)^{\eta_1} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_9 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_9 \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1} \|(-\Delta + 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}((n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2))(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \qquad (4\text{-}5) \\
&\leq C_{10} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1-\frac{1}{2}} \|(n_1^1 - n_1^2)\mu_1(1 + n_1^2 + n_1^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
&\leq C_{11}(R)\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_1-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C_{12}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las desigualdades (4-4) y (4-5) y fijando $\eta_1 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$, observamos que

$$\|\Phi_1(z_2) - \Phi_1(z_1)\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \leq C_{13}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}\|z_2 - z_1\|_X,$$

para algún $C_{13}(R) > 0$.
De manera similar, dada la similitud entre Φ_1 y Φ_2, el anterior razonamiento nos permite encontrar una constante $C_{14}(R) > 0$ tal que

$$\|\Phi_2(z_2) - \Phi_2(z_1)\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \leq C_{14}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_2}\|z_2 - z_1\|_X,$$

para algún $\eta_2 \in (\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$.
Ahora, analicemos Φ_3. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_3(z_2) - \Phi_3(z_1) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 + (\alpha n_1^1 + \beta n_2^1)c^1)(\cdot, s) ds \\
&\quad - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^2\nabla c^2 + (\alpha n_1^2 + \beta n_2^2)c^2)(\cdot, s) ds \\
&= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s) ds \\
&\quad \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\underbrace{(\alpha n_1^1 + \beta n_2^1)c^1}_{:=\gamma_1} - \underbrace{(\alpha n_1^2 + \beta n_2^2)c^2}_{:=\gamma_2})(\cdot, s) ds \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Analizando I_1 y usando el mismo razonamiento realizado en (4-5), conseguimos estimar I_1 para algún $\eta_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$ y $\delta \in (0, 1-\eta_3)$ como sigue

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{W^{1,q}(\Omega)} ds \\
\leq & C_{15} \int_0^t \|(-\Delta+1)^{\eta_3} e^{(t-s)\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
= & C_{15} \int_0^t \|(-\Delta+1)^{\eta_3} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{16} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3} \|e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{17} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3} \|(-\Delta+1)^{\delta} e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta}(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds \\
\leq & C_{18} \int_0^t \left(\frac{t-s}{2}\right)^{-\eta_3-\delta} \|(u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2)(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds.
\end{aligned} \tag{4-6}$$

Luego, teniendo en cuenta que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow D(A^\theta)$ y la definición del conjunto S, existe una constante $C_{19}(R) > 0$ verificando

$$\begin{aligned}
\|u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} = & \|u^1\nabla c^1 - u^2\nabla c^1 + u^2\nabla c^1 - u^2\nabla c^2\|_{L^q(\Omega)} \\
\leq & \|(u^1 - u^2)\nabla c^1\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla(c^1 - c^2)u^2\|_{L^q(\Omega)} \\
\leq & C_{19}(R)\|u^1 - u^2\|_{D(A^\theta)} + C_{19}(R)\|c^1 - c^2\|_{W^{1,q}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando lo anterior en (4-6), obtenemos que existe $C_{20}(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & C_{20}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|u^1 - u^2\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))} \\
& + C_{20}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4-7}$$

Similarmente, para I_2 garantizamos la existencia de constantes $C_{21}(R), C_{22} > 0$ que satisfacen

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq & C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\
& + C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \\
\leq & C_{21}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|c^1 - c^2\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \\
& + C_{22}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|n_1^1 - n_1^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))} \\
& + C_{22}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|n_2^1 - n_2^2\|_{C^0([0,T);C^0(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4-8}$$

Por las desigualdades (4-7) y (4-8), podemos tomar una constante $C_{23}(R) > 0$ satisfaciendo

$$\|\Phi_3(z_2) - \Phi_3(z_1)\|_{C^0([0,T);W^{1,q}(\Omega))} \leq C_{23}(R)T^{1-\delta-\eta_3}\|z_2 - z_1\|_X.$$

Procederemos a realizar nuestro análisis para Φ_4. Observemos que

$$
\begin{aligned}
\Phi_4(z_2)-\Phi_4(z_1)=&\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1^2+\delta n_2^2)\nabla\phi-(u^2\cdot\nabla)u^2)(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma n_1^1+\delta n_2^1)\nabla\phi-(u^1\cdot\nabla)u^1)(\cdot,s)ds\\
=&\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot\nabla)u^2-(u^1\cdot\nabla)u^1))(\cdot,s)ds\\
=&\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)ds\\
:=&I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

Usando en I_2 el mismo razonamiento que se encuentra en (4-2), conseguimos que

$$
\begin{aligned}
\|A^\theta I_1\|_{L^2(\Omega)}\le&\int_0^t\|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\le&\int_0^t(t-s)^{-\theta}\|\gamma(n_1^2-n_1^1)+\delta(n_2^2-n_2^1))\nabla\phi(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\le&\, C_{24}T^{1-\theta}\|n_1^2-n_1^1\|_{C^0([0,T);L^\infty(\Omega))}+C_{24}T^{1-\theta}\|n_2^2-n_2^1\|_{C^0([0,T);L^\infty(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

Haciendo uso del Lema 2.8.3 con $n=2$ y teniendo en cuenta que $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)\hookrightarrow D(A^\theta)$, garantizamos la existencia de constantes $C_{25},C_{26}(R)>0$ tales que

$$
\begin{aligned}
\|A^\theta I_2\|_{L^2(\Omega)}\le&\int_0^t\|A^\theta e^{-(t-s)A}\mathbb{P}((u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\le&\int_0^t(t-s)^{-\theta}\|(u^2\cdot(\nabla(u^2-u^1))+(u^2-u^1)\cdot\nabla u^1))(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
\le&\int_0^t(t-s)^{-\theta}\|u^2\|_{L^\infty(\Omega)}C_{25}(\|A^\theta(u^2-u^1)\|_{L^2(\Omega)}+\|u^2-u^1\|_{L^2(\Omega)})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t(t-s)^{-\theta}\|u^2-u^1\|_{L^\infty(\Omega)}C_{25}(\|A^\theta u^1\|_{L^2(\Omega)}+\|u^1\|_{L^2(\Omega)})(\cdot,s)ds\\
\le&\, C_{26}(R)T^{1-\theta}\|u^1-u^2\|_{C^0([0,T);D(A^\theta))}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\|\Phi_4(z_2)-\Phi_4(z_1)\|_{C^0([0,T))}\le C_{27}(R)T^{1-\theta}\|z_2-z_1\|_X.$$

Finalmente conseguimos que

$$\|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)\|_X\le\underbrace{(C_{13}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}+C_{14}(R)T^{\frac{1}{2}-\eta_1}+C_{23}(R)T^{1-\delta-\eta_3}+C_{27}(R)T^{1-\theta})}_{:=k(T)}\|z_2-z_1\|_X.$$

Ahora, observemos que las constantes $C_{13}(R), C_{14}(R), C_{23}(R), C_{27}(R) > 0$ son independientes de T y dependen directamente de R. Entonces, eligiendo R tal que $\Phi(S) \subseteq S$ y tomando $T > 0$ lo suficientemente pequeña (de ser necesario) para que $k(T) \in (0,1)$, conseguimos la contractividad de Φ con $\Phi(S) \subseteq S$. Así, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, podemos garantizar la existencia de un punto fijo $(n_1, n_2, c, u) \in S$, obteniendo así la existencia local de soluciones en nuestro sistema.

4.3.3. Resultados de regularidad

Por otro lado, para garantizar las condiciones de regularidad citadas en el Lema 4.2.3 bastaría con realizar un razonamiento análogo al realizado en [32] usando estimativas estándar de Schauder con las cuales conseguiríamos la existencia de un $\alpha \in (0,1)$ y un $C_{28} > 0$ tales que

$$\begin{aligned} &\|n_1\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} + \|n_2\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} \\ &+ \|c\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} + \|u\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[t,t+1])} < C_{27} \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de lo cual se verifica el resultado de regularidad deseado.

4.4. Soluciones globales Vs Soluciones no acotadas

Consideremos los espacios

$$X_0 = C^0\left(\underbrace{\left[0, \frac{3T}{4}\right)}_{I_0}; C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)\right),$$

$$X_1 = C^0\left(\underbrace{\left[\frac{3T}{4}, \frac{3T}{2}\right)}_{I_1}; C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)\right),$$

$$X_2 = C^0\left(\underbrace{\left[\frac{3T}{2}, \frac{9T}{4}\right)}_{I_2}; C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)\right),$$

$$\vdots$$

Observemos que el razonamiento realizado en la Sección 4.3, puede ser aplicado a cada X_n siempre que

$$(n_1, n_2, c, u)(\cdot, z_n) \in C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta),$$

siendo z_n el menor número real del intervalo I_n. Luego, podemos elegir $T_{max} \in (0, \infty]$ tal que $(n_1, n_2, c, u) \in S \subseteq X_M$, donde

$$X_M = C^0\left([0, T_{max}); C^0(\Omega) \times C^0(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \times D(A^\theta)\right).$$

Del anterior análisis tenemos dos posibilidades mutuamente excluyentes:

1. $T_{max} = \infty$, asegurando soluciones globales en el sistema.
2. Existe una discontinuidad de (n_1, n_2, c, u) en T_{max}, de lo cual podemos inferir que

$$\lim_{t \to T_{max}} \left(\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}\right) = \infty,$$

para todo $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$.

4.5. Positividad de n_1, n_2 y c

Por la similitud de las ecuaciones 1 y 2 de nuestro sistema (4-1), bastará analizar la positividad de n_1 y se tendrá de manera análoga la positividad de n_2. Para mostrar la positividad de n_1, recordemos que esta función puede dividirse en su parte positiva y parte negativa de la siguiente manera:

$$n_1 = n_1^+ - n_1^-, \qquad \text{donde } n_1^+ := \max\{0, n_1\} \text{ y } n_1^- := -\min\{0, n_1\}.$$

Entonces, es claro que n_1 es no negativa si y solo si $n_1^- = 0$. Para probar que n_1 es positiva, mostraremos primero que ella es no negativa, esto es, $n_1^- = 0$. Para iniciar, observemos que la parte negativa de n_1 satisface la ecuación 1 de nuestro sistema (4-1). Multiplicando esta por n_1^- e integrando esta sobre Ω tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega n_1^-(n_1^-)_t + \int_\Omega n_1^- u \cdot \nabla n_1^- = &\int_\Omega n_1^- \Delta n_1^- - \chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla \cdot (n_1^- \nabla c) \\ &+ \mu_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 (1 - n_1^- - a_1 n_2).\end{aligned} \tag{4-9}$$

Procedemos a analizar cada término de la anterior ecuación. Aplicando integración por partes, usando la igualdad $\nabla \cdot u = 0$ y sabiendo que $u = 0$ en $\partial\Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-) &= \int_\Omega u_1 n_1^-(n_1^-)_x + \int_\Omega u_2 n_1^-(n_1^-)_y \\
&= -\int_\Omega n_1^-(u_1 n_1^-)_x - \int_\Omega n_1^-(u_2 n_1^-)_y \\
&= -\int_\Omega n_1^-((u_1 n_1^-)_x + (u_2 n_1^-)_y) \\
&= -\int_\Omega n_1^-((u_1)_x n_1^- + u_1(n_1^-)_x + (u_2)_y) n_1^- + u_2(n_1^-)_y) \\
&= -\int_\Omega n_1^-(n_1^- \nabla \cdot u + u \cdot \nabla n_1^-) \\
&= -\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_\Omega n_1^-(u \cdot \nabla n_1^-) = 0. \tag{4-10}$$

Usando las fórmulas de Green obtenemos que

$$\int_\Omega n_1^- \Delta n_1^- = -\int_\Omega |\nabla n_1^-|^2. \tag{4-11}$$

Por otro lado, usando integración por partes y la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = \frac{1}{\chi_1}$ se sigue que existe un $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
-\chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla \cdot (n_1^- \nabla c) &= -\chi_1 \int_\Omega n_1^-[(n_1^- c_x)_x + (n_1^- c_y)_y] \\
&= \chi_1 \int_\Omega (n_1^-)_x c_x + (n_1^-)_y c_y n_1^- \\
&= \chi_1 \int_\Omega n_1^- \nabla n_1^- \cdot \nabla c \qquad (4\text{-}12)\\
&\leq \int_\Omega |\nabla n_1^-|^2 + \frac{\chi_1}{4} \int_\Omega |n_1^- \nabla c|^2 \\
&\leq \int_\Omega |\nabla n_1^-|^2 + C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2.
\end{aligned}$$

Reemplazando (4-10), (4-11), (4-12) en (4-9) y teniendo en cuenta $\frac{d}{dt}(n_1^-)^2 = 2n_1^-(n_1^-)_t$ y $\partial_\nu n_1 = 0$, podemos conseguir un $C_2 > 0$ que satisface

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (n_1^-)^2 &\leq C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 + \mu_1 \int_\Omega (n_1^-)^2(1 - n_1^- - a_1 n_2) \\
&\leq C_1 \int_\Omega (n_1^-)^2 + \mu_1 \|1 - n_1^- - a_1 n_2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))} \int_\Omega (n_1^-)^2 \\
&\leq C_2 \int_\Omega (n_1^-)^2.
\end{aligned}$$

despejando conseguimos finalmente que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (n_1^-)^2 \leq 2C_2 \int_\Omega (n_1^-)^2.$$

Ahora, sabemos que $n_1^-(0) = 0$ y aplicando la Desigualdad de Gronwall sobre la anterior expresión, vemos que

$$\int_\Omega (n_1^-)^2 \leq \left(\int_\Omega (n_1^-(0))^2\right) e^{2C_2 t} = 0.$$

Por lo tanto, $n_1^- = 0$ c.t.p., y como n_1^- es continua, concluimos que $n_1^- = 0$ en $\Omega \times [0,T]$ como se quería. Por similitud, $n_2^- = 0$ en $\Omega \times [0,T]$.

Teniendo en cuenta que la parte negativa de la función c satisface la tercer ecuación del sistema (4-1), entonces procedemos a multiplicar por c^- e integrar sobre Ω consiguiendo que

$$\int_\Omega c^-(c^-)_t + \int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- = \int_\Omega c^- \Delta c^- - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)(c^-)^2. \tag{4-13}$$

Haciendo uso de la integración por partes, el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot u = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- &= \int_\Omega u_1 c^-(c^-)_x + \int_\Omega u_2 c^-(c^-)_y \\
&= -\int_\Omega (u_1 c^-)_x c^- - \int_\Omega (u_2 c^-)_y c^- \\
&= -\int_\Omega c^-((u_1 c^-)_x + (u_2 c^-)_y) \\
&= -\int_\Omega c^-((u_1)_x c^- + u_1 (c^-)_x + (u_2)_y c^- + u_2 (c^-)_y) \\
&= -\int_\Omega c^-(c^- \nabla \cdot u + u \cdot \nabla c^-) \\
&= -\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^-
\end{aligned}$$

De lo cual se concluye que

$$\int_\Omega c^- u \cdot \nabla c^- = 0$$

Reemplazando lo anterior en (4-13), teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}(c^-)^2 = 2c^-(c^-)_t$ y usando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (c^-)^2 &= \int_\Omega c^- \Delta c^- - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)(c^-)^2 \\
&\leq -\int_\Omega |\nabla c^-|^2 + \underbrace{\|\alpha n_1 + \beta n_2\|_{C^0([0,T];C^0(\Omega))}}_{:=C_3} \int_\Omega (c^-)^2 \\
&\leq C_3 \int_\Omega (c^-)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(c^-)^2 \leq 2C_3 \int_\Omega (c^-)^2.$$

Aplicando la Desigualdad de Gronwall en la anterior expresión y teniendo en cuenta que $c^-(0) = 0$, tenemos que

$$\int_\Omega (c^-)^2 \leq e^{2tC_3} \int_\Omega (c^-(0)) = 0.$$

Dado que c^- es continua, podemos concluir que $c^- = 0$ y, así, c es una función no negativa en $\Omega \times [0, T]$.

Finalmente, una vez mostrado que las funciones n_1, n_2 y c son no negativas, veremos a continuamos por qué ellas son positivas. Basta demostrar que c es positiva, ya que el razonamiento que se usa puede ser aplicado a las funciones n_1 y n_2. Para comenzar con este análisis, observemos que de la tercera ecuación del sistema (4-1), tenemos que

$$\underbrace{\Delta c - c_t - u \cdot \nabla c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c}_{:=Lc} = 0.$$

Notemos que L es un operador uniformemente parabólico y que $Lc \leq 0$. Definamos $M := \inf_{\Omega \times (0,T]} c$. Como $c \geq 0$, entonces $M \geq 0$. Luego, realizando un razonamiento por casos, concluimos que:

- Si $M > 0$, entonces de inmediato $c \geq M > 0$, cumpliéndose la positividad.
- Si $M = 0$, entonces, partiendo nuevamente por casos,
    1. Si $c > M$ en todo $\Omega \times (0, T]$, entonces $c > 0$.
    2. Si $c = M$ en cierto punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$, entonces por el principio fuerte del mínimo para operadores parabólicos tendremos que $c = M$ en todo $\Omega \times [0, t_0]$. Por lo tanto, $c_0 = M$, pero $c_0 > 0$ lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $c > 0$.

En conclusión, c es positiva. De forma análoga, n_1 y n_2 son positivas.

4.6. Unicidad de la solución

En esta parte, mostraremos que el sistema en cuestión tiene una única solución a través de un argumento de contradicción. Para ello, sean (n_1, n_2, c, u, P) y $(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{c}, \hat{u}, \hat{P})$ dos soluciones del sistema (4-1), y definamos

$$\begin{aligned}
N_1 &:= n_1 - \hat{n}_1, \\
N_2 &:= n_2 - \hat{n}_2, \\
K &:= c - \hat{c}, \\
W &:= u - \hat{u}, \\
R &:= P - \hat{P}.
\end{aligned}$$

De la primera ecuación del sistema (4-1) tenemos que

$$
\begin{aligned}
(n_1)_t + u \cdot \nabla n_1 &= \Delta n_1 \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2),\\
(\hat{n}_1)_t + \hat{u} \cdot \nabla \hat{n}_1 &= \Delta \hat{n}_1 \chi_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla \hat{c}) + \mu_1 \hat{n}_1 (1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2).
\end{aligned}
$$

Restando las anteriores ecuaciones conseguimos

$$
\begin{aligned}
(N_1)_t + u \cdot \nabla n_1 - \hat{u} \cdot \nabla \hat{n}_1 = {}& \Delta (N_1)_t - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c - \hat{n}_1 \nabla \hat{c})\\
&+ \mu_1 [(n_1 - \hat{n}_1) - (n_1^2 - \hat{n_1}^2) - a_1 (n_1 n_2 - \hat{n}_1 \hat{n}_2)].
\end{aligned} \tag{4-14}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
u \cdot \nabla n_1 - \hat{u} \cdot \nabla \hat{n}_1 &= u \cdot \nabla n_1 - \hat{u} \cdot \nabla n_1 + \hat{u} \cdot \nabla n_1 - \hat{u} \cdot \nabla \hat{n}_1\\
&= W \cdot \nabla n_1 + \hat{u} \cdot \nabla N_1.
\end{aligned} \tag{4-15}
$$

Reescribiendo el segundo término al lado derecho de la ecuación (4-14) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c - \hat{n}_1 \nabla \hat{c}) &= \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c - \hat{n}_1 \nabla c + \hat{n}_1 \nabla c - \hat{n}_1 \nabla \hat{c})\\
&= \chi_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) + \chi_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K).
\end{aligned} \tag{4-16}
$$

Analizando el último término al lado derecho de la ecuación (4-14) vemos que

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 [(n_1 - \hat{n}_1) - (n_1^2 - \hat{n_1}^2) - a_1 (n_1 n_2 - \hat{n}_1 \hat{n}_2)]\\
&\qquad = \mu_1 N_1 - \mu_1 (n_1 N_1 + \hat{n_1} N_1) - a_1 (n_1 N_2 + \hat{n}_2 N_1)\\
&\qquad = \mu_1 N_1 (1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2) - a_1 \mu_1 n_1 N_2.
\end{aligned} \tag{4-17}
$$

Reemplazando (4-15), (4-16) y (4-17) en (4-14), llegamos a la igualdad

$$
\begin{aligned}
(N_1)_t + W \cdot \nabla n_1 + \hat{u} \cdot \nabla N_1 = {}& \Delta N_1 - \chi_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) - \chi_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K)\\
&+ \mu_1 N_1 (1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2) - a_1 \mu_1 n_1 N_2.
\end{aligned} \tag{4-18}
$$

Luego, multiplicamos la ecuación (4-18) por N_1 e integramos sobre Ω para obtener

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega N_1 (N_1)_t + \int_\Omega N_1 W \cdot \nabla n_1 + \int_\Omega N_1 (\hat{u} \cdot \nabla N_1) &= \int_\Omega N_1 \Delta N_1 - \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c)\\
- \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) + \mu_1 \int_\Omega N_1^2 (1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2) &- a_1 \mu_1 \int_\Omega N_1 n_1 N_2.
\end{aligned} \tag{4-19}
$$

A continuación analizaremos algunos términos de la ecuación (4-19). Usando integración por partes y observando que $W = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot W = 0$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega N_1 W \cdot \nabla n_1 &= \int_\Omega N_1[W_1(n_1)_x + W_2(n_1)_y] \\
&= \int_\Omega N_1 W_1 (n_1)_x + \int_\Omega N_1 W_2 (n_1)_y \\
&= -\int_\Omega (N_1 W_1)_x n_1 - \int_\Omega (N_1 W_2)_y n_1 \\
&= -\int_\Omega n_1 \nabla \cdot (N_1 W) \\
&= -\int_\Omega n_1 [\nabla N_1 \cdot W + N_1 \nabla \cdot W] \\
&= -\int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W.
\end{aligned} \tag{4-20}$$

Por otro lado, notemos que al usar integración por partes varios términos de la ecuación (4-19) son reescritos como sigue

$$\int_\Omega N_1(\hat{u} \cdot \nabla N_1) = 0, \tag{4-21}$$

$$\int_\Omega N_1 \Delta N_1 = -\int_\Omega |\nabla N_1|^2, \tag{4-22}$$

$$\int_\Omega \chi_1 N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) = -\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla N_1 \cdot \nabla c, \tag{4-23}$$

$$\int_\Omega \chi_1 N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) = -\chi_1 \int_\Omega \hat{n}_1 \nabla N_1 \cdot \nabla K. \tag{4-24}$$

De (4-23), (4-24) y aplicando la desigualdad de Cauchy, obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) + \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) &= \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla N_1 \cdot \nabla c + \hat{n}_1 \nabla N_1 \cdot \nabla K \\
\leq \chi_1 \left(\frac{1}{8\chi_1} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + 2\chi_1 \int_\Omega |N_1 \nabla c|^2 \right) &+ \chi_1 \left(\frac{1}{8\chi_1} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + 2\chi_1 \int_\Omega |\hat{n}_1 \nabla K|^2 \right).
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la desigualdad previa y las propiedades de regularidad para c y $\hat{n}_1$, garantizamos la existencia de constantes $C_1, C_2 > 0$ que satisfacen

$$\chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (N_1 \nabla c) + \chi_1 \int_\Omega N_1 \nabla \cdot (\hat{n}_1 \nabla K) \leq \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_1 \int_\Omega N_1^2 + C_2 \int_\Omega |\nabla K|^2. \tag{4-25}$$

Por otro lado, observemos que de la regularidad de n_1, $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ existe $C_3 > 0$ verificando

$$\int_\Omega \mu_1 N_1^2 (1 - n_1 - \hat{n}_1 - a_1 \hat{n}_2) \leq C_3 \int_\Omega N_1^2. \tag{4-26}$$

Y utilizando la regularidad de n_1 junto con la desigualdad de Young conseguimos una constante $C_4 > 0$ tal que

$$-a_1\mu_1 \int_\Omega n_1 N_1 N_2 \leq a_1\mu_1 \int_\Omega |n_1 N_1 N_2| \leq C_4 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 \right). \tag{4-27}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt} N_1^2 = 2N_1(N_1)_t$ y reemplazando (4-20), (4-21), (4-22), (4-25), (4-26) y (4-27) en (4-19), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega N_1^2 \leq & \int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W - \int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_1 \int_\Omega N_1^2 \\ & + C_2 \int_\Omega |\nabla K|^2 + C_3 \int_\Omega N_1^2 + C_4 \int_\Omega N_1^2 + C_4 \int_\Omega N_2^2. \end{aligned} \tag{4-28}$$

Además, notemos que existe $C_5 > 0$ satisfaciendo

$$\int_\Omega n_1 \nabla N_1 \cdot W \leq \int_\Omega |\nabla N_1||n_1 W| \leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_5 \int_\Omega |W|^2.$$

Entonces, reemplazando lo anterior en (4-28) y despejando tenemos que existe una constante $C_6 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega N_1^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_6 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2 \right). \tag{4-29}$$

Usando un razonamiento similar en la segunda ecuación del sistema (4-1), podemos afirmar que existe $C_7 > 0$ verificando la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega N_2^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_2|^2 + C_7 \left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2 \right). \tag{4-30}$$

De la tercera ecuación de nuestro sistema (4-1) tenemos que

$$\begin{aligned} c_t + u \cdot \nabla c &= \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c, \\ \hat{c}_t + \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} &= \Delta \hat{c} - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c}. \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones conseguimos

$$K_t + u \cdot \nabla c - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} = \Delta K - ((\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c}). \tag{4-31}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} u \cdot \nabla c - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} &= u \cdot \nabla c - u \cdot \nabla \hat{c} + u \cdot \nabla \hat{c} - \hat{u} \cdot \nabla \hat{c} \\ &= u \cdot \nabla K + \nabla \hat{c} \cdot W. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c} =& (\alpha n_1 + \beta n_2)c - (\alpha n_1 + \beta n_2)\hat{c} \\ & + (\alpha n_1 + \beta n_2)\hat{c} - (\alpha \hat{n}_1 + \beta \hat{n}_2)\hat{c} \\ =& (\alpha n_1 + \beta n_2)K - \hat{c}(\alpha N_1 + \beta N_2). \end{aligned}$$

Reemplazando las dos últimas igualdades en (4-31) tenemos que

$$K_t + u \cdot \nabla K + \nabla \hat{c} \cdot W = \Delta K - ((\alpha n_1 + \beta n_2)K - (\alpha N_1 + \beta N_2)\hat{c}). \tag{4-32}$$

Multiplicando por K e integrando sobre Ω vemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega KK_t + \int_\Omega K(u \cdot \nabla K) + \int_\Omega K\nabla \hat{c} \cdot W = \int_\Omega K\Delta K - \int_\Omega ((\alpha n_1 + \beta n_2)K^2 \\ - \int_\Omega K(\alpha N_1 + \beta N_2)\hat{c}).\end{aligned} \tag{4-33}$$

Usando razonamientos análogos a los expuestos en el estudio de la primera ecuación del sistema (4-1) notamos que existen constantes $C_8, C_9 > 0$ tales que

- $\displaystyle\int_\Omega Ku \cdot \nabla K = 0,$
- $\displaystyle\int_\Omega KW \cdot \nabla \hat{c} = -\int_\Omega \hat{c}W \cdot \nabla K,$
- $\displaystyle\int_\Omega K\Delta K = -\int_\Omega |\nabla K|^2,$
- $\displaystyle-\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)K^2 \leq \int_\Omega |(\alpha n_1 + \beta n_2)K^2| \leq C_8 \int_\Omega K^2,$
- $\displaystyle\int_\Omega (\alpha N_1 + \beta N_2)K\hat{c} = \alpha \int_\Omega \hat{c}N_1K + \beta \int_\Omega \hat{c}N_2K \leq C_9 \int_\Omega |N_1K| + C_9 \int_\Omega |N_2K|.$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega K^2 \leq \int_\Omega \hat{c}W \cdot \nabla K - \int_\Omega |\nabla K|^2 + C_8 \int_\Omega K^2 + C_9 \int_\Omega |N_1K| + C_9 \int_\Omega |N_2K|. \tag{4-34}$$

Además, podemos acotar el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior como sigue

$$\int_\Omega \hat{c}W \cdot \nabla K \leq \int_\Omega |\hat{c}W||\nabla K| \leq C_{10} \int_\Omega |W|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla K|^2,$$

para alguna constante $C_{10} > 0$. Usando la desigualdad de Young en (4-34), reemplazando lo anterior y despejando conseguimos una constante $C_{11} > 0$ que satisface la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega K^2 \leq -\int_\Omega |\nabla K|^2 + C_{11}\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2\right). \tag{4-35}$$

Ahora, de la cuarta ecuación del sistema (4-1) tenemos que

$$\begin{aligned}u_t + (u \cdot \nabla)u &= \Delta u + \nabla P + (\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla \phi \\ \hat{u}_t + (\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u} &= \Delta \hat{u} + \nabla \hat{P} + (\gamma \hat{n}_1 + \delta \hat{n}_2)\nabla \phi.\end{aligned}$$

Restando las anteriores ecuaciones obtenemos la igualdad

$$W_t + (u \cdot \nabla)u - (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) = \Delta W + \nabla R + (\gamma N_1 + \delta N_2)\nabla\phi. \tag{4-36}$$

Analizando los dos últimos términos de la izquierda de la ecuación (4-36) vemos que

$$\begin{aligned}(u \cdot \nabla)u - (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) &= (u_1 D_1 + u_2 D_2)u - (\hat{u}_1 D_1 + \hat{u}_2 D_2)u \\ &= (u_1 D_1 - \hat{u}_1 D_1 u) + (u_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 \hat{u}) \\ &= (u_1 D_1 u - \hat{u}_1 D_1 u + \hat{u}_1 D_1 u - \hat{u}_1 D_1 \hat{u}) \\ &\quad + (u_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 u + \hat{u}_2 D_2 u - \hat{u}_2 D_2 \hat{u}) \\ &= (W \cdot \nabla)u + (\hat{u} \cdot \nabla)W.\end{aligned}$$

Aplicando $W\cdot$ a la ecuación (4-36) e integrando sobre Ω obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\int_\Omega W \cdot W_t + \int_\Omega W \cdot (u \cdot \nabla)u - \int_\Omega W \cdot (\hat{u} \cdot \nabla \hat{u}) &= \int_\Omega W \cdot \Delta W + \int_\Omega W \cdot \nabla R \\ &\quad + \int_\Omega W \cdot (\gamma N_1 + \delta N_2)\nabla\phi.\end{aligned} \tag{4-37}$$

Observemos que usando integración por partes y teniendo en cuenta que $W = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot W = 0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_\Omega W \cdot (W \cdot \nabla)u &= \int_\Omega W \cdot (W_1 D_1 u + W_2 D_2 u) \\ &= \int_\Omega W_1 W \cdot D_1 u + \int_\Omega W_2 W \cdot D_2 u \\ &= \int_\Omega W_1 (W_1 (u_1)_x + W_2 (u_2)_x) + \int_\Omega W_2 (W_1 (u_1)_y + W_2 (u_2)_y) \\ &= -\int_\Omega (W_1^2)_x u_1 + (W_1 W_2)_x u_2 + (W_2 W_1)_y u_1 + (W_2^2) u_2 \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} (W_1^2)_x + (W_2 W_1)_y \\ (W_1 W_2)_x + (W_2^2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} W_1 (W_1)_x + W_1((W_1)_x + (W_2)_y) + W_2 (W_1)_y \\ W_1 (W_2)_x + W_2((W_1)_x + (W_2)_y) + W_2 (W_2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot \begin{pmatrix} W_1 (W_1)_x + W_2 (W_1)_y \\ W_1 (W_2)_x + W_2 (W_2)_y \end{pmatrix} \\ &= -\int_\Omega u \cdot (\nabla W \cdot W).\end{aligned} \tag{4-38}$$

Utilizando un razonamiento similar al previo, notamos que

$$\int_\Omega W \cdot (\hat{u} \cdot \nabla)W = -\int_\Omega W \cdot (\nabla W \cdot \hat{u}). \tag{4-39}$$

Por las fórmulas de Green tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega W\cdot\Delta W &= \int_\Omega W_1\cdot\Delta W_1 + W_2\Delta W_2\\ &= -\int_\Omega |\nabla W_1|^2 - \int_\Omega |\nabla W_2|^2\\ &= -\int_\Omega |\nabla W|^2.\end{aligned}\tag{4-40}$$

Haciendo uso de la integración por partes, observamos que

$$\int_\Omega W\cdot\nabla R = \int_\Omega W_1 R_x + \int_\Omega W_2 R_y = -\int_\Omega R\nabla\cdot W = 0.\tag{4-41}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega W\cdot\underbrace{(\gamma N_1+\delta N_2)}_{:=N^*}\nabla\phi &= \int_\Omega N^*(W_1\phi_x + W_2\phi_y)\\ &= -\int_\Omega ((N^*W_1)_x + (N^*W_2)_y)\phi\\ &= -\int_\Omega (N^*_x W_1 + N^*(W_1)_x + N^*_y W_2 + N^*(W_2)_y)\phi\\ &= -\int_\Omega (N^*((W_1)_x + (W_2)_y) + W\cdot\nabla N^*)\phi\\ &= -\int_\Omega W\cdot\nabla N^*\phi\\ &= -\int_\Omega \gamma\phi W\cdot\nabla N_1 - \int_\Omega \delta\phi W\cdot\nabla N_1\end{aligned}\tag{4-42}$$

Reemplazando (4-38), (4-39), (4-40), (4-41) y (4-42) en (4-36), llegamos a la desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |W|^2 \le &\int_\Omega W\cdot(\nabla W\cdot\hat{u}) + \int_\Omega u\cdot(\nabla W\cdot W)\\ &- \int_\Omega |\nabla W|^2 - \int_\Omega \gamma\phi W\cdot\nabla N_1 - \int_\Omega \delta\phi W\cdot\nabla N_1.\end{aligned}\tag{4-43}$$

Observamos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Cauchy con ε, existe una constante $C_{12} > 0$ satisfaciendo la desigualdad

$$\int_\Omega W\cdot(\nabla W\cdot\hat{u}) \le \int_\Omega |W||\nabla W||\hat{u}| \le C_{12}\int_\Omega |W|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla W|^2.$$

Así, por un razonamiento similar al previo y por la desigualdad de Young aplicada en (4-43), conseguimos una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |W|^2 \le -\int_\Omega |\nabla W|^2 + C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \int_\Omega |\nabla N_2|^2 + \int_\Omega |W|^2\right).\tag{4-44}$$

En resumen, recopilando las desigualdades (4-29), (4-30), (4-35) y (4-44), sabemos que existen constantes $C_6, C_7, C_{11}, C_{13} > 0$ tales que

1. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega N_1^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + C_6\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2\right),$

2. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega N_2^2 \leq -\int_\Omega |\nabla N_2|^2 + C_7\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega |W|^2 + \int_\Omega |\nabla K|^2\right),$

3. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega K^2 \leq -\int_\Omega |\nabla K|^2 + C_{11}\left(\int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2\right),$

4. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega |W|^2 \leq C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla N_1|^2 + \int_\Omega |\nabla N_2|^2 + \int_\Omega |W|^2\right).$

Ahora, definimos

$$y(t) := \int_\Omega N_1^2 + \int_\Omega N_2^2 + \int_\Omega K^2 + \int_\Omega |W|^2.$$

Entonces, a partir de las desigualdades listadas anteriormente, podemos inferir la existencia de una constante $C_{14} > 0$ tal que

$$y'(t) \leq C_{14} y(t).$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall y usando el hecho de que $N_1(0), N_2(0), K(0), W(0) = 0$, concluimos que $N_1 = N_2 = K = W = 0$. Esto último demuestra la unicidad de las componentes n_1, n_2, c y u de la solución al sistema (4-1). Además, por la cuarta ecuación del sistema (4-1) y la unicidad de las componentes n_1, n_2, c y u, vemos que $\nabla P = \nabla \hat{P}$. De lo anterior, concluimos que, exceptuando suma con constantes, P es único.

4.7. Acotamiento

Vamos a demostrar el Teorema 4.2.1, para ello vamos a probar algunos lemas previos :

Lema 4.7.1. Existen constantes $C_7 > 0$ y $C_8 > 0$ tales que la solución de 4-1 satisface que:

$$\int_\Omega n_i(\cdot, t) \leq C_7 \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_i^2 \leq C_8 \text{ para todo } t \in (0, T_{max} - \tau),$$

para $i = 1, 2$, donde $\tau := \text{mín}\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$.

Demostración:

Observemos que por las fórmulas de Green:

$$\int_\Omega \Delta n_1 = \int_{\partial\Omega} \partial_v n_1 dS = 0,$$

ya que, por nuestros valores iniciales, $\partial_v n_1 = 0$.
Por otro lado, aplicando integración por partes, usando $\nabla \cdot u = 0$ y teniendo en cuenta que n_1 se anula en $\partial\Omega$, conseguimos la igualdad

$$\int_\Omega u \cdot \nabla n_1 = -\int_\Omega n_1 \nabla \cdot u = 0.$$

Además, utilizando nuevamente las fórmulas de Green y teniendo en cuenta que, por las condiciones iniciales $\partial_v n_1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \cdot (n_1 \nabla c) &= \int_\Omega (n_1)_{x_1} c_{x_1} + n1 c_{x_1 x_1} + (n_1)_{x_2} c_{x_2} + n_1 c_{x_2 x_2} \\
&= \int_\Omega \nabla n_1 \cdot \nabla c + \int_\Omega n_1 \Delta c \\
&= \int_{\partial\Omega} \partial_v n_1 c \; dS = 0.
\end{aligned}$$

Observemos que de la primera ecuación de nuestro sistema 4-1, tenemos que:

$$\frac{d}{dt} n_1 + u \cdot \nabla n_1 = \Delta n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) \text{ en } (0, T_{max}].$$

Integrando la anterior expresión conseguimos que

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega n_1 = \int_\Omega \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2) = \mu_1 \int_\Omega n_1 - \mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \mu_1 a_1 \int_\Omega n_1 n_2 \tag{4-45}$$

para cada $t \in (0, T_{max})$. Ahora, recordando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos

$$\begin{aligned}
| \langle 1, n_1 \rangle | \leq \|1\|_{L^2(\Omega)} \|n_2\|_{L^2(\Omega)} &\Leftrightarrow \int_\Omega n_1 \leq \left(\int_\Omega 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega n_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow \left(\int_\Omega n_1 \right)^2 \leq \left(\int_\Omega 1^2 \right) \left(\int_\Omega n_1^2 \right) = |\Omega| \int_\Omega n_1^2.
\end{aligned}$$

De la última desigualdad, podemos ver que

$$\frac{1}{|\Omega|} \left(\int_\Omega n_1 \right)^2 \leq \int_\Omega n_1^2.$$

Además, como n_1, n_2 son positivas, llegamos a que $\displaystyle\int_\Omega n_1 n_2 \geq 0$, para cada $t \in (0, T_{max})$.

Definamos ahora la función $y(t) := \displaystyle\int_\Omega n_1(\cdot, t)$ y notemos que de 4-45:

$$y'(t) = \mu_1 y(t) - \mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \mu_1 a_1 \int_\Omega n_1 n_2 \leq \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2$$

De lo que se concluye que $y'(t) \leq \mu_1 y(t) - \dfrac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2$.

Sea $g(t) = \text{máx} \left\{ \displaystyle\int_\Omega n_{1,0}, |\Omega| \right\}$, razonando por casos y usando el criterio de comparación de EDO expuesto en el Lema 2.6.9 se sigue que

1. Si $g(t) = |\Omega|$, claramente $g'(t) = 0$. Para cada $t \geq 0$, definamos la función

$$\phi_1(y(t), t) = \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y^2(t).$$

Observar que $\phi_1(g(t), t) = 0 = g'(t)$.
Como estamos asumiendo que $g(t) = |\Omega|$, entonces se tiene que $y(0) \leq g(0)$ y, así, $y(t) \leq g(t)$, para cada $t \geq 0$.

2. Si $g(t) = \int_\Omega n_{1,0}$, defina la constante $c := \mu_1 \left(\int_\Omega n_{1,0} \right) \left(1 - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega n_{1,0} \right)$ y

$$\phi_2(y(t), t) := \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2 - c.$$

Como se está asumiendo que $\int_\Omega n_{1,0} \geq |\Omega|$, entonces $c \leq 0$ y, por lo tanto, $-ct \geq 0$, para cada $t \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} (y(t) - ct)' &= y'(t) - c \\ &\leq \mu_1 y(t) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} y(t)^2 - c \\ &\leq \mu_1 (y(t) - ct) - \frac{\mu_1}{|\Omega|} (y(t) - ct)^2 - c \\ &= \phi(y(t) - ct, t). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de este subcaso, se tiene que $g(0) = |\Omega| \geq \int_\Omega n_{1,0} = y(0) - c \cdot 0$. De ahí, concluimos que $y(t) \leq y(t) - ct \leq g(t)$.

De esta manera, mostramos que, para cada $t \geq 0$, tenemos la siguiente desigualdad

$$y(t) \leq \text{máx} \left\{ \int_\Omega n_{1,0}, |\Omega| \right\}.$$

Observar que $n_{1,0} \in C(\overline{\Omega})$ y Ω es un conjunto acotado, entonces por el Teorema de Heine-Borel tenemos que $n_{1,0}$ es una función acotada.
Ahora, observemos que de la igualdad (4-45) tenemos la desigualdad

$$\int_\Omega n_1^2 \leq \int_\Omega n_1(\cdot, t) - \frac{1}{\mu_1} \frac{d}{dt} \int_\Omega n(\cdot, t).$$

Ahora fije $\tau = \text{mín}\{1, \frac{1}{6} T_{max}\}$, tome $t \in (0, T_{max} - \tau)$, y tenga en cuenta que existe un $C_7 > 0$ tal que acota a $\int_\Omega n_1(\cdot, t)$ en $t \in (0, T_{max})$ por lo demostrado previamente, notemos que:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\tau} \int_\Omega n_1^2 &\leq \int_t^{t+\tau} \int_\Omega n_1(\cdot, t) - \frac{1}{\mu_1} \int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} \int_\Omega n_1(\cdot, t) \\ &\leq C_7 \tau - \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega n_1(\cdot, t + \tau) + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega n_1(\cdot, t) \leq C_7(\tau + 1), \end{aligned}$$

con lo cual se conseguiría la última desigualdad. Para el caso n_2 se hace un razonamiento análogo. ■

Lema 4.7.2. Existe una constante $C_9 > 0$ tal que

$$\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_9$$

, para todo $t \in (0, T_{max})$. Además, el mapeo $t \mapsto \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es no creciente en $(0,\infty)$. Más aún, existe una constante $C_{10} > 0$ tal que

$$\int_0^{T_{max}} \int_\Omega |\nabla c|^2 \leq C_{10}.$$

Demostración:

Observemos que de nuestro modelo (4-1) en la ecuación 3 tenemos que:

$$c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c.$$

Tome $p > 1$, multiplicando la anterior ecuación por c^{p-1} e integrando sobre Ω, conseguimos la siguiente igualdad

$$\int_\Omega c^{p-1}c_t + \int_\Omega c^{p-1}u \cdot \nabla c = \int_\Omega c^{p-1}\Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^p.$$

Notemos que $\frac{d}{dt}c^p = pc^{p-1}c_t$, luego $c^{p-1}c_t = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}c^p$ y, así, reemplazando en la anterior igualdad llegamos a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p = -\int_\Omega c^{p-1}u \cdot \nabla c + \int_\Omega c^{p-1}\Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^p. \tag{4-46}$$

Estimemos la primera integral del lado derecho de la anterior igualdad. Para ello, notemos que

$$\int_\Omega c^{p-1}u \cdot \nabla c = \int_\Omega c^{p-1}u_1 c_x + \int_\Omega c^{p-1}u_2 c_y := I_1 + I_2.$$

Usando integración por partes y el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$, reescribimos I_1 e I_2 como sigue

$$I_1 = -\tfrac{1}{p}\int_\Omega c^p(u_1)_x \text{ y } I_2 = -\tfrac{1}{p}\int_\Omega c^p(u_2)_y.$$

Entonces, $I_1 + I_2 = -\frac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega c^p \nabla \cdot u$ y así, reemplazando en 4-46 obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p = \int_\Omega c^p \nabla \cdot u + \int_\Omega c^{p-1}\Delta c - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^p. \tag{4-47}$$

De la anterior ecuación, vamos a analizar la expresión $\displaystyle\int_\Omega c^{p-1}\Delta c$. En detalle, esta expresión, podemos escribirla como sigue

$$\int_\Omega c^{p-1}\Delta c = \int_\Omega c^{p-1}(c_x)_x + \int_\Omega c^{p-1}(c_y)_y.$$

Usando integración por partes podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_\Omega c^{p-1}(c_x)_x &= -\int_\Omega c_x(c^{p-1})_x + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_x v_1 dS,\\ \int_\Omega c^{p-1}(c_y)_y &= -\int_\Omega c_y(c^{p-1})_y + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_y v_2 dS.\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición de derivada exterior, vemos que $v{\cdot}Dc = \partial_v c$ y, por las condiciones del problema, sabemos que $\partial_v c = 0$ en $\partial\Omega$, para todo $t > 0$. Por lo tanto,

$$\int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_x v_1 dS + \int_{\partial\Omega} c^{p-1}c_y v_2 dS = \int_{\partial\Omega} c^{p-1} v\cdot Dc\ dS = \int_{\partial\Omega} c^{p-1}\partial_v c\ dS = 0.$$

En conclusión,

$$\int_\Omega c^{p-1}\Delta c = -\int_\Omega c_x(c^{p-1})_x - \int_\Omega c_y(c^{p-1})_y = -(p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2.$$

Reemplazando en 4-47 la anterior igualdad conseguimos que:

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p = \frac{1}{p}\int_\Omega c^p\nabla\cdot u - (p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2 - \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c^p.$$

Teniendo en cuenta que $\nabla\cdot u = 0$ en Ω, para todo $t > 0$, que α y β son constantes positivas y que n_1, n_2 y c son funciones positivas, tenemos que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^p \leq -(p-1)\int_\Omega c^{p-2}|\nabla c|^2 \leq 0.$$

Con lo cual se concluye que la función $t \to \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es un mapeo decreciente, luego para cada $t_2 \geq t_1 \geq 0$ se tiene que $\|c(\cdot,t_2)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|c(\cdot,t_1)\|_{L^p(\Omega)}$. Así, para cada $t > 0$, obtenemos que

$$\|c(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|c_0(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} := C_9.$$

Al ser p arbitrario, conseguiríamos (4.7.2).
Por otro lado, observemos que si tomamos $p = 2$ en (4.7) conseguiríamos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^2 \leq -\int_\Omega |\nabla c|^2.$$

Integrando sobre $(0,t)$ en la anterior desigualdad y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |\nabla c|^2 \leq& \frac{1}{2}\left(\int_\Omega c_0^2 - c^2(\cdot,t)\right)\\ \leq& \frac{1}{2}\int_\Omega c_0^2.\end{aligned}$$

Dado que $t \in (0, T_{max})$ fue arbitrario, (4.7.2) es verdadera como queríamos. ■

Lema 4.7.3. Existe una constante $C_{11} > 0$ satisfaciendo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{11}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Además, para todo $t \in (0, T_{max} - \tau)$,

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{11} \text{ y } \int_t^{t+\tau} \int_\Omega |u|^4 \leq C_{11},$$

donde $\tau = \text{mín}\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$.

Demostración:

Tomando $n = \gamma n_1 + \delta n_2$ y $g = 0$, observamos que al multiplicar por u e integrar toda la ecuación 4 de 4-1, obtenemos que el término $\int_\Omega u \cdot \nabla P$ se anula. En efecto, usando integración por partes, el hecho de que $u = 0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla \cdot u = 0$, tenemos que $\int_\Omega u \cdot \nabla P = -\int_\Omega P \nabla \cdot u = 0$. Por lo anterior, podemos usar el mismo razonamiento que se encuentra en el Lema 3.4 de [9] para obtener la existencia de constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que, para $y(t) = \int_\Omega |u(\cdot,t)|^2$ con $t \in [0, T_{max})$, verifican

$$y'(t) + \int_\Omega |\nabla u|^2 + C_1 y(t) \leq h(t), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}),$$

donde

$$h(t) := C_2 \int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot,t).$$

Por otro lado, podemos ver

$$\begin{aligned}
(\gamma^2 n_2 - \delta^2 n_1)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \gamma^2 n_2^2 + \delta^2 n_1^2 \geq 2\gamma\delta n_1 n_2 \\
&\Leftrightarrow \gamma^2 n_1^2 + \gamma^2 n_2^2 + \delta^2 n_1^2 + \delta^2 n_2^2 \geq \gamma^2 + 2\gamma\delta n_1 n_2 + \delta^2 n_2^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2) n_1^2 + (\gamma^2 + \delta^2) n_2^2 \geq (\gamma n_1 + \delta n_2)^2 \\
&\Leftrightarrow (\gamma^2 + \delta^2)(n_1^2 + n_2^2) \geq (\gamma n_1 + \delta n_2)^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$h(t) \leq C_2 \int_\Omega (\gamma^2 + \delta^2)(n_1^2 + n_2^2) \leq C_2(\gamma^2 + \delta^2) \left(\int_\Omega n_1^2(\cdot,t) + \int_\Omega n_1^2(\cdot,t) \right).$$

Por el Lema 4.7.1, existe $C_8 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} h(s)ds \leq C_2(\gamma^2 + \delta^2)(C_8 + C_8) = C_3\ .$$

Usando el Lema 2.6.11, conseguimos que, para cada $t \in (0, T_{max})$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = y(t) \leq \text{máx} \left\{ \int_\Omega |u_0|^2 + C3, \frac{C_2}{C_1 \tau} + 2C_3, \right\}$$

consiguiéndose así la primera parte de nuestro lema.
Ahora, vamos a demostrar la segunda parte de este lema. Para ello, observemos que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos la siguiente igualdad

$$\int_t^{t+\tau} y'(s)ds = y(t+\tau) - y(t), \text{ donde } \tau = \text{mín}\{1, \tfrac{1}{6}T_{max}\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} -y(t) + \int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \int_t^{t+\tau} y'(t) + \int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 + C_1\int_t^{t+\tau} y(s)ds \\ &\leq \int_t^{t+\tau} h(s)ds \\ &= C_2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s)ds. \end{aligned}$$

De ahí que obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq y(t) + C_2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s)ds.$$

Observemos que, para cada $s \in (t, t+\tau)$,

$$\int_\Omega (\gamma n_1 + \delta n_2)^2(\cdot, s) = \gamma^2\int_\Omega n_1^2(\cdot, s) + \delta^2\int_\Omega n_2^2(\cdot, s) + 2\gamma\delta\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s).$$

Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s) \leq \left(\int_\Omega n_1^2(\cdot, s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_2^2(\cdot, s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos por (4.7.1) y por la primera parte de este lema que existen constantes $C_8, C_{11} > 0$ tales que, para cada $t \in (0, T_{max} - \tau)$,

$$\gamma^2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_1^2(\cdot, s) + \delta^2\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_2^2(\cdot, s) + 2\gamma\delta\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_1 n_2(\cdot, s) \leq \gamma^2 C_8 + \delta^2 C_8 + \gamma\delta C_8$$

y

$$y(t) = \int_\Omega |u(\cdot, t)|^2 \leq C_{11}^2.$$

Por lo anterior, conseguiríamos que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{11}^2 + C_2(\gamma^2 C_8 + \delta^2 C_8 + \gamma\delta C_8),$$

con lo cual tendríamos la segunda desigualdad de nuestro lema.

Ahora, vamos a demostrar la última desigualdad. Por la fórmula de interpolación de Gagliardo-Nirenberg, tenemos que existe un $C_4 > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega |u(\cdot,t)|^4\right)^{\frac{1}{4}} = \|u(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C_4\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,

$$\int_\Omega |u(\cdot,t)|^4 \leq C_4\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Notemos que por todo lo anteriormente demostrado, para cada $t \in (0, T_{max})$ podemos acotar $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2$. Por lo tanto, existe una constante $C_5 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega |u(\cdot,s)|^4 ds \leq C_5, \quad \forall t \in (0, T_{max}-\tau).$$

■

Lema 4.7.4. Existe una constante $C_{12} > 0$ tal que

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{12}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Primero, observemos que $\nabla \cdot u_t = (u_t)_x + (u_t)_y = [u_x + u_y]_t = (\nabla \cdot u)_t = 0$, lo cual implica de manera directa que $\mathbb{P}(u_t) = u_t$, y recordemos que, por la definición del operador de Stokes, $\mathbb{P}(\Delta u) = -Au$. Además, por el Lema 2.8.5, tenemos que $\mathbb{P}(\nabla P) = 0$. Entonces, teniendo en cuenta todas las igualdades previas, aplicando el Proyector de Leray en la cuarta ecuación de (4-1) y multiplicando lo resultante por Au, obtenemos

$$(Au)u_t + (Au)^2 = -\mathbb{P}((u\cdot\nabla)u)Au + (\gamma\mathbb{P}(n_1\nabla\phi)Au + \delta\mathbb{P}(n_2\nabla\phi))Au.$$

Por el primer postulado del Lema 2.8.8, por el Lema 2.8.10, usando integración por partes, teniendo en cuenta que el coeficiente de viscosidad es $\nu = 1$ y que $u = 0$ en $\partial\Omega$, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{d}{dt}\left(\|(u_1)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_1)_y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_2)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u_2)_y\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&= 2\int_\Omega ((u_1)_x[(u_1)_t]_x + (u_1)_y[(u_1)_t]_y + (u_2)_x[(u_2)_t]_x + (u_2)_y[(u_2)_t]_y)\\
&= -2\int_\Omega (u_1)_{xx}(u_1)_t + (u_1)_{yy}(u_1)_t + (u_2)_{xx}(u_2)_t + (u_2)_{yy}(u_2)_t\\
&= \int_\Omega (-\Delta)u_t = \int_\Omega (Au)u_t.
\end{aligned}$$

Luego, integrando en 4.7, teniendo en cuenta que el proyector de Helmholtz-Leray es acotado por el Lema 2.8.5 y usando la desigualdad de Hölder, observamos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}u|^2 + \int_\Omega |Au|^2 \\
&\quad = -\int_\Omega \mathbb{P}((u\cdot\nabla)u)Au + \gamma\int_\Omega P(n_1\nabla\phi)Au + \delta\int_\Omega \mathbb{P}(n_2\nabla\phi)Au \\
&\quad \leq \int_\Omega \left|[\sqrt{2}(u\cdot\nabla)u]\frac{Au}{\sqrt{2}}\right| + \left(\gamma\int_\Omega \left|(\sqrt{2\gamma}n_1\nabla\phi)\frac{Au}{\sqrt{2\gamma}}\right| + \delta\int_\Omega \left|(\sqrt{2\delta}n_2\nabla\phi)\frac{Au}{\sqrt{2\delta}}\right|\right) \\
&\quad \leq \frac{3}{4}\int_\Omega |Au|^2 + \int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 + \gamma^2\int_\Omega |n_1\nabla\phi|^2 + \delta^2\int_\Omega |n_2\nabla\phi|^2 \\
&\quad \leq \frac{3}{4}\int_\Omega |Au|^2 + \int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 + \|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left(\gamma^2\int_\Omega |n_1|^2 + \delta^2\int_\Omega |n_2|^2\right).
\end{aligned}
$$

Usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, (4.7.3) y la desigualdad de Hölder, tenemos que existen constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ y $C_3 > 0$ tales que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |(u\cdot\nabla)u|^2 &\leq \int_\Omega \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla u|^2 \\
&= \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1\|Au\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_2\|Au\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\int_\Omega \frac{1}{2}|Au|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[C_2\left(2\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |Au|^2 + C_3\int_\Omega |\nabla u|^2.
\end{aligned}
$$

Como $\phi \in C^{1+\eta}$, entonces existe un $K > 0$ tal que $\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{C^{1+\eta}(\Omega)} \leq K$. Así, por el Lema 2.8.8, teniendo en cuenta las desigualdades previas y por (4.7), notamos que para cada $t \in (0, T_{max})$

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_3\int_\Omega |\nabla u|^2 + C_3\left[\gamma^2\int_\Omega n_1^2 + \delta^2\int_\Omega n_2^2\right].
$$

Definamos $h_1(t) := C_3\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2$ y $h_2(t) = C_3\left[\gamma^2\int_\Omega n_1^2 + \delta^2\int_\Omega n_2^2\right]$. Por el Lema 4.7.1 y Lema 4.7.2, existen $C_4, C_5 > 0$ tales que, para cada $t \in (0, T_{\text{máx}} - \tau)$, llegamos a las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+\tau} h_1(s)ds &\leq C_4, \\
\int_t^{t+\tau} h_2(s)ds &\leq C_5.
\end{aligned}
$$

Usando el razonamiento presentado en (4.7) mostramos el resultado. ■

Lema 4.7.5. Existe una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{13}, \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\Delta c|^2 \leq C_{13}, \text{ para cada } t \in (0, T_{max} - \tau),$$

donde $\tau = \text{mín}\{1, \frac{1}{6} T_{max}\}$.

Demostración:
Aplicando integración por partes y usando el hecho de que $\partial_\nu c = 0$, observamos que

$$\int_\Omega (\Delta c) c_t = \int_\Omega c_{xx} c_t + c_{yy} c_t = \left(-\int_\Omega c_x (c_t)_x + \int_{\partial\Omega} c_x c_t \nu^x \right) + \left(-\int_\Omega c_y (c_t)_y + \int_{\partial\Omega} c_y c_t \nu^y \right) =$$
$$= -\int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla c|^2 + \int_{\partial\Omega} c_t \nu Dc,$$

obteniendo lo siguiente

$$\int_\Omega (-\Delta c) c_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 - \int_{\partial\Omega} c_t \partial_\nu c = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2.$$

De nuestro sistema (4-1) sabemos que

$$c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - (\alpha n_1 + \beta n_2) c.$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad previa por $-\Delta c$ e integrando sobre Ω, conseguimos la expresión

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 + \int_\Omega |\Delta c|^2 = \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) c \Delta c + \int_\Omega (u \cdot \nabla c) \Delta c.$$

De la desigualdad de Schwarz, tenemos que $(\alpha n_1 + \beta n_2)^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2)$. Por lo tanto,

$$|\alpha n_1 + \beta n_2| c \Delta c \leq \left[(\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2) \right]^{\frac{1}{2}} c \Delta c = \left[\sqrt{2} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} (n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}} c \right] \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}} \Delta c \right].$$

Aplicando la desigualdad de Young sobre la anterior expresión, observamos que

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{2} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} (n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}} c \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \Delta c \right] &\leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} (n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}} c \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \Delta c \right]^2 \\ &\leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2) c^2 + \frac{1}{4} (\Delta c)^2 \\ &\leq (\alpha^2 + \beta^2)(n_1^2 + n_2^2) \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} (\Delta c)^2. \end{aligned}$$

Aquí, notamos que la última desigualdad de la cadena de desigualdades anterior es obtenida gracias al Lema 4.7.2 y a la desigualdad

$$(c(\cdot,t))^2 \leq \|c(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq \|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}.$$

Utilizando todo lo anterior, mostramos que

$$\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2)c\Delta c \leq (\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (n_1^2+n_2^2) + \frac{1}{4}\int_\Omega (\Delta c)^2.$$

Ahora, de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg sabemos que

$$\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{GN}\|\Delta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}.$$

Usando la desigualdad de Hölder y la consecuencia previa de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u\cdot\nabla c)\Delta c &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^4(\Omega)}\|\Delta c\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{L^4(\Omega)}\left(C_{GN}\|\Delta c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\Delta c\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \\
&= \left(\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} C_{GN}\|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{3}{4}\left\|\frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{4}C^4_{GN}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{4}\|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 + \|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (\alpha n_1+\beta n_2)c\Delta c + \int_\Omega (u\cdot\nabla c)\Delta c \\
&\leq (\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c|^2 + \|\Delta c\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2(\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2) + 2C_{14}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (4\text{-}48)$$

Sean $C_{15} > 0$ tal que $2(\alpha^2+\beta^2)\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} < C_{15}$ y $2C_{14}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} < C_{15}$. Definamos las funciones h_1 y h_2 como sigue

$$h_1(t) = C_{15}\int_\Omega (n_1^2+n_2^2), \quad h_2(t) = C_{15}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

Observemos que por Lema 4.7.1, Lema 4.7.2 y Lema 4.7.3, existe $C_{16} > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c|^2 + \int_t^{t+\tau} h_1(s)ds + \int_t^{t+\tau} h_2(s)ds < C_{16}. \tag{4-49}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe un $t_0 \in (t, t+\tau)$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, s)|^2 = \tau \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2.$$

Luego,

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla c(\cdot, s)|^2 \leq \frac{1}{\tau} C_{16}.$$

Observemos que si reescribimos $k = t + \tau$, tenemos que $k \in (\tau, T_{max})$ y $t_0 \in (k - \tau, k)$. Ahora suponga que $k \in (0, \tau]$, entonces, nuevamente por el teorema del valor medio para integrales, conseguimos la existencia de un $t_0 \in (0, k) = (k - \tau, k) \cap (0, \infty)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 = \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \chi_{(0,\infty)(t_0)} = \frac{1}{\tau} \int_{k-\tau}^k \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \chi_{(0,\infty)}(t_0) =$$
$$\frac{1}{\tau} \int_{k-\tau}^k \int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \leq \frac{1}{\tau} C_{16}.$$

De lo cual, vemos que existe un $t_0 \in (r - \tau, r) \cap [0, \infty)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \leq \text{máx} \left\{ \int_\Omega |\nabla c_0|^2, \frac{C_{16}}{\tau} \right\} = C_{17}.$$

Consideremos ahora el siguiente razonamiento

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) \left(e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \right) \right] =$$
$$\left(\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} + \left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} (-h_2(t)) =$$
$$e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \left[\left(\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 \right) - \left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) h_2(t) \right] \leq e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t)\ .$$

Además, tenemos

$$\int_{t_0}^k \frac{d}{dt} \left[\left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \right) \left(e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} \right) \right] =$$
$$\left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, k)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^k h_2(s)ds} - \left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^{t_0} h_2(s)ds}.$$

Por consiguiente,

$$\left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, k)|^2 \right) e^{-\int_{t_0}^k h_2(s)ds} - \left(\int_\Omega |\nabla c(\cdot, t_0)|^2 \right) \leq \int_{t_0}^k e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t)dt.$$

Así,

$$\int_\Omega |\nabla c(\cdot,k)|^2 \leq \frac{1}{e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds}}\left[\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)|^2 + \int_{t_0}^k e^{-\int_{t_0}^t h_2(s)ds} h_1(t)dt\right].$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (4-49), el Lema 4.2.3 y que $\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)|^2 \leq C_{17}$, conseguimos la existencia de una constante $C_{18} > 0$ tal que $\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)| \leq C_{18}$, lo cual implica la primera parte de nuestro lema.
Finalmente si integramos (4-48) y tenemos en cuenta que $\int_\Omega |\nabla c(\cdot,t_0)| \leq C_{18}$, obtenemos directamente la última estimativa deseada. ■

Lema 4.7.6. Sean $p \geq 2$, $i = 1,2$ y $\tau = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{6}T_{max}\right\}$. Asuma que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\int_t^{1+\tau}\int_\Omega n_i^p \leq M, \text{ para cada } t \in (0, T_{max}-\tau).$$

Entonces existe una constante $C_{19}(p,M) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{19}(p,M), \text{ para cada } t \in (0,T_{max}).$$

Además,

$$\int_t^{t+\tau} n_i^{p+1} \leq C_{19}(p,M), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}-\tau).$$

Demostración:
Observemos que $\dfrac{d}{dt}n_1^p = pn_1^{p-1}(n_1)_t$ y, por lo tanto,

$$\int_\Omega n_1^{p-1}(n_1)_t = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p.$$

Además, $\nabla(n_1^{p-1}) = (p-1)n_1^{p-2}\nabla n_1$. Entonces,

$$-\int_\Omega n_1^{p-1}\Delta n_1 = -\int_\Omega n_1^{p-1}\Delta n_1 + \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu n_1)n_1^{p-1} = \int_\Omega (\nabla n_1)\cdot(\nabla(n_1^{p-1})) = (p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2.$$

Un cálculo simple nos permite deducir que $\nabla\cdot(n_1\nabla c) = (\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + n_1\Delta c$. Así,

$$\int_\Omega \chi_1 n_1^{p-1}\nabla\cdot(n_1\nabla c) = \chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)(\nabla c) + \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a tomar la primera ecuación de nuestro sistema (4-1) y la multiplicamos por n_1^{p-1} para obtener

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p + \int_\Omega n^{p-1} u\cdot\nabla n_1 + (p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 = \\ &= -\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) - \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2).\end{aligned} \tag{4-50}$$

Notemos que:

$$\int_\Omega n_1^p\Delta c = \int_\Omega n_1^p(c_x)_x + \int_\Omega n_1^p(c_y)_y =$$
$$\left(-\int_\Omega (n_1^p)_x c_x + \int_{\partial\Omega} n_1^p c_x\nu^x\right) + \left(-\int_\Omega (n_1^p)_y c_y + \int_{\partial\Omega} n_1^p c_y\nu^y\right) = -p\int_\Omega n_1^{p-1}\nabla c\cdot\nabla n_1,$$

de lo cual vemos que

$$\begin{gathered}-\chi_1\textstyle\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) - \chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2) = \\ \chi_1(p-1)\displaystyle\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + \int_\Omega \mu_1 n_1^p(1-n_1-a_1n_2)\ .\end{gathered}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{gathered}\int_\Omega n_1^{p-1}u\cdot\nabla n_1 = p\int_\Omega n_1^{p-1}(u_1(n_1)_x + u_2(n_2)_y) = \int_\Omega u_1(n_1^p)_x + \int_\Omega u_2(n_2^p)_y = \\ -\int_\Omega (u_1)_x n_1^p + \int_{\partial\Omega} u_1n_1^p\nu^x - \int_\Omega (u_2)_y n_2^p + \int_{\partial\Omega} u_2n_2\nu^y = \int_\Omega n_1^p\nabla\cdot u = 0.\end{gathered}$$

Teniendo en cuenta las anteriores igualdades y reemplazando en la expresión (4-50), llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p + p(p-1)\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 = &\, p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) + p\mu_1\int_\Omega n_1^p \\ &- p\mu_1\int_\Omega n_1^p - p\mu_1\int_\Omega n_1^{p+1} - a_1p\mu_1\int_\Omega n_1^p n_2.\end{aligned} \tag{4-51}$$

Notemos que

$$\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2 = \int_\Omega n_1^{p-1}((n_1)_x c_x + (n_1)_y c_y) = \frac{1}{p}\int_\Omega (n_1^p)_x c_x + \frac{1}{p}\int_\Omega (n_1^p)_y c_y = -\frac{1}{p}\int_\Omega n_1^p\Delta c.$$

Luego,

$$p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) = -(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^p\Delta c \le (p-1)\chi_1\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg garantizamos la existencia de una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\int_\Omega (n_1^{\frac{p}{2}})^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_1\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^2 \leq$$
$$C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_2.$$

Esta última igualdad se consiguió utilizando el Lema 4.7.1 y $\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^2 = \int_\Omega n_1(\cdot,t)$. Además, observemos que $|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}| = \left[(n_1^{\frac{p}{2}})_x\right]^2 + \left[(n_1^{\frac{p}{2}})_y\right]^2 = \frac{p}{2}(n_1^{p-2})|\nabla n_1|^2$. Por lo tanto,

$$(p-1)\chi_1\left(\int_\Omega n_1^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$(p-1)\chi_1\left(C_1\|\nabla n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)}\|n_1^{\frac{p}{2}}\|_{L^2(\Omega)} + C_2\right)\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{p}{2}(p-1)\chi_1C_1\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n^p\right)^{\frac{1}{2}} + (p-1)\chi_1C_2\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la desigualdad de Young, existe una constante $k_3^1 \geq 0$ tal que

$$\frac{p}{2}(p-1)\chi_1C_1\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n^p\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$p(p-1)\left[\frac{1}{2}\int_\Omega n^{p-2}|\nabla n|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_1C_1}{2}\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega n_1^p\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] =$$
$$p(p-1)\left(\int_\Omega n^{p-2}|\nabla n|^2\right) + p(p-1)k_3^1\int_\Omega|\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p.$$

Por otro lado, usando nuevamente la desigualdad de Young, existe una constante $k_3^2 \geq 0$ tal que

$$(p-1)\chi_1C_2\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\chi_1^2C_2^2\int_\Omega|\Delta c|^2 + \frac{1}{2}(p-1)^2 \leq k_3^2\int_\Omega|\Delta c|^2 + k_3^2.$$

Tomando $C_3 = \max\{k_3^1, k_3^2\}$, mostramos que

$$p(p-1)\chi_1\int_\Omega n_1^{p-1}(\nabla n_1)\cdot(\nabla c) \leq$$
$$p(p-1)\left(\int_\Omega n_1^{p-2}|\nabla n|^2\right) + p(p-1)C_3\int_\Omega|\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p + C_3\int_\Omega|\Delta c|^2 + C_3.$$

Reemplazando la anterior desigualdad en (4-51) y simplificando, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p \leq C_3\int_\Omega|\Delta c|^2\int_\Omega n_1^p + C_3\left(\int_\Omega|\Delta c|^2\right) + C_3 + p\mu_1\int_\Omega n_1^p - p\mu_1\int_\Omega n_1^{p+1}. \tag{4-52}$$

Por las desigualdades de Hölder y Young, tenemos que

$$\int_\Omega \frac{n_1^p}{2}\cdot 2 \le \left(\int_\Omega \left(\frac{n_1}{2}\right)^{p\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega 2^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{2^{p+1}(p+1)}\left(\int_\Omega n_1^{p+1}\right) + \frac{2^p}{p}|\Omega| \le \frac{1}{2}\int_\Omega n_1^{p+1} + \frac{2^p}{p}|\Omega|.$$

De modo que podemos concluir que existe una constante $C_4 > 0$ tal que

$$p\mu_1 \int_\Omega n_1^p \le \frac{p\mu_1}{2}\int_\Omega n_1^{p+1} + C_4.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y la desigualdad (4-52), tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega n_1^p \le C_3 \int_\Omega |\Delta c|^2 \int_\Omega n_1^p + C_3\left(\int_\Omega |\Delta c|^2\right) + C_3 + C_4. \tag{4-53}$$

Denotemos por $h(t) := C_3 \int_\Omega |\nabla c(\cdot,t)|^2$ con $t \in (0, T_{max})$. Por el lema 4.7.5, tenemos que existe una constante $C_{13} > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau} h(t) \le C_{13} \text{ con } t \in (0, T_{max} - \tau).$$

Usando el razonamiento realizado en el Lema 4.7.5 con el uso del Teorema del Valor Medio para integrales, conseguimos que, dado $k \in (0, T_{max})$, existe $t_0 \in (t-\tau, t) \cap [0,\infty)$ tal que

$$\int_\Omega n_1^p(\cdot, t_0) \le C_6 := \text{máx}\left\{\int_\Omega n_0^p, \frac{L}{\tau}\right\}, \text{ para algún } L > 0.$$

Utilizando la misma técnica del lema previo, la anterior cota nos implica la existencia de una constante $C_7 > 0$ satisfaciendo $\int_\Omega n_1^p(\cdot,t) \le C_7$, demostrando el resultado. ■

Lema 4.7.7. Para todo $p > 1$ e $i = 1, 2$, existe una constante $C_{20}(p) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le C_{20}(p), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Sabemos del Lema 4.7.1 que existe $C_8 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_i^2(\cdot,t) \le C_8 \text{ para cada } t \in (0, T_{max} - \tau).$$

Por el lema anterior, tenemos que existe una constante $C_{19}(2) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C_{19}(2), \text{ para cada } t \in (0, T_{max}).$$

Además, por el Teorema de Fubini y usando nuevamente el Lema 4.7.1, llegamos a

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega n_i^3 = \int_\Omega\int_t^{t+\tau} n_i^3 \le C_{19}(2)|\Omega|, \quad \text{para cada } t \in (0, T_{max} - \tau).$$

Continuando de la misma forma y usando el Lema 4.7.6, mostramos de manera inductiva nuestro Lema para cada $p > 1$ con $p \in \mathbb{Z}$. Restaría probar el resultado para los valores de p que no son enteros. Para ello, observe que si tomamos un $r \in (p, p+1)$ con $p > 1$ entero, entonces existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega)\|n_i(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

En caso de que $r \in (1,2)$ tenemos que $\|n_i(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega)\|n_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$. Teniendo en cuenta lo anterior y que nuestro Lema ya está demostrado para enteros mayores a 1, se sigue lo que se desea para cualquier $p > 1$. ■

Lema 4.7.8. Para todo $\sigma_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, existe una constante $C_{21}(\sigma_1) > 0$ tal que

$$\|A^{\sigma_1}u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{21}(\sigma_1), \text{ para todo } t \in (\tau, T_{max}),$$

donde $\tau = \min\{1, \frac{1}{6}T_{max}\}$. En particular, existen constantes $\lambda \in (0,1)$ y $C_{22} > 0$ tales que

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^\lambda(\Omega)} \leq C_{22}, \text{ para todo } t \in (\tau, T_{max}).$$

Demostración:

Fijemos $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Por hipótesis, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es un dominio con frontera suave. Entonces, por el Lema 2.8.7,

$$D(A) = L^2_\sigma(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega)^n \cap W^{2,2}(\Omega)^n.$$

Tomemos $t \in (\tau, T_{max})$ y $t_0 = \max\{\tau, t-1\}$. Por la fórmula de variación de parámetros, tenemos que

$$u(\cdot,t) = e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u](\cdot,s)ds.$$

Luego, aplicando A^α en la expresión anterior conseguimos

$$\begin{aligned}\|A^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq& \|A^\alpha e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \int_{t_0}^t \|A^\alpha e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi - (u\cdot\nabla)u]\|_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Si $t_0 = \tau$, entonces, por las propiedades del semigrupo de Stokes, tenemos que

$$\|A^\alpha e^{-(t-\tau)A}u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-(t-\tau)A}A^\alpha u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\alpha u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $t_0 > \tau$, entonces $t - t_0 = 1$. Dado que A^α es un operador auto-adjunto definido positivo y teniendo en cuenta el Lema 2.3.17, tenemos que

$$\|A^\alpha e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Ae^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|^\alpha_{L^2(\Omega)}\|e^{-(t-t_0)A}u(\cdot,t_0)\|^{1-\alpha}_{L^2(\Omega)}.$$

Ahora, en vista de las propiedades que tenemos del semigrupo de Stokes, sabemos que $\|A^{\alpha}e^{-tA}\| \leq t^{-\alpha}$. Además, $\|e^{-tA}\| \leq 1$, para cada $t \geq 0$, y usando el Lema 4.7.7, obtenemos la existencia de una constante $C_4 > 0$ tal que

$$\|A^{\alpha}e^{-(t-t_0)A}u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4.$$

Usando de similar forma las mismas estimativas previamente mencionadas, sabemos que existe $C_5 > 0$ tal que

$$\int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{C_5}{1-\alpha}.$$

Por otro lado,

$$\int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha}\|u(\cdot, s)\cdot\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Tomando $\beta \in (\frac{1}{2}, \alpha)$ y usando el hecho de que $D(A^{\beta}) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$, observamos que existe $C_6 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, s)\cdot\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u(\cdot, s)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_6\|A^{\beta}u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ahora, definamos $M(T) := \sup\limits_{t\in(\tau,T)} \|A^{\alpha}u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$ con $T \in (\tau, T_{max})$. Usando la fórmula de interpolación del Lema 2.3.17 con $a = \frac{2\beta-1}{2\alpha-1} \in (0,1)$ y teniendo en cuenta que $\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, entonces podemos garantizar la existencia de constantes $C_7, C_8 > 0$ que satisfacen

$$\begin{aligned}C_6\|A^{\beta}u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_7\|A^{\alpha}u(\cdot, s)\|^{a}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u(\cdot, s)\|^{2-a}_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_8 M^{a}(T).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{t_0}^{t} \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u](\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq C_8 M^{a}(T)\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \leq \frac{C_1C_8}{1-\alpha}M^{\alpha}(T).$$

Luego, existen $C_9, C_{10} > 0$ tales que

$$\|A^{\alpha}u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 + C_{10}M^{a}(T),$$

para cada $t \in (\tau, T)$. Así,

$$M(T) \leq C_9 + C_{10}M^{a}(T),$$

para todo $T \in (\tau, T_{max})$. Usando el Lema 2.6.10 vemos que $M(T) \leq \text{máx}\{2C_9, (2C_{10})^{\frac{1}{1-a}}\}$. Haciendo $T \to T_{max}$, mostramos la primera desigualdad de nuestro Lema. La segunda parte de nuestro resultado, la demostramos gracias a que el operador de Stokes satisface las siguientes inmersiones $D(A) \hookrightarrow D(A^{\alpha}) \hookrightarrow C^{\theta}(\Omega)$, con $\theta \in (0, 2\alpha - 1)$. ∎

Lema 4.7.9. Existe una constante $C_{24} > 0$ tal que

$$\|c(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_{24}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:
Por resultados de regularidad parabólica, tenemos que $c \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}])$. Luego,

$$\|c_x\|_{L^1(\Omega\times(0,T_{max}))} \quad \text{y} \quad \|c_y\|_{L^1(\Omega\times(0,T_{max}))} < \infty.$$

Por lo tanto, ∇c es acotada c.t.p en $\Omega \times (0, 2\tau]$ y, así, $\|c(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}}$ es acotada para cada $t \in (0, 2\tau]$. Veamos que también es acotado para cada $t \in (2\tau, T_{max})$, con lo cual terminaría la prueba. Primero, observemos que de la fórmula de variación de parámetros, conseguimos

$$c(\cdot, t) = e^{(t-\tau)\Delta}c(\cdot, \tau) - \int_\tau^t e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot, s)ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = &\left\|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}c(\cdot, \tau) - \int_\tau^t \nabla e^{(t-s)\Delta}(u\nabla c + (\alpha n_1 + \beta n_2)c)(\cdot, s)ds\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
\leq &\, C_3(1 + (t-\tau)^{-1})e^{-\lambda_1(t-\tau)}\|c(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ C_3\int_\tau^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{4}}e^{-\lambda_1(t-\tau)})\|(\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^4(\Omega)} \\
&+ C_3\int_\tau^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{2}})e^{\lambda_1(t-\tau)}\|u(\cdot, s)\nabla c(\cdot, s)\|_{L^1(\Omega)}ds.
\end{aligned}$$

Definamos $M(T) := \sup_{t\in(2\tau,T)} \|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ con $T \in (2\tau, T_{\text{máx}})$. Notemos que $M(T)$ está bien definido debido a que $c \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}])$. Por el Lema 4.7.2, Lema 4.7.5, Lema 4.7.7, Lema 4.7.8 y las desigualdades de Cauchy, Hölder y Gagliardo-Nirenberg, sabemos que existen $K_1, K_2, K_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|c(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_1, \\
\|(\alpha n_1 + \beta n_2)c\|_{L^4(\Omega)} &\leq \|c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}(\alpha\|n_1(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} + \beta\|n_2(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)}) \leq K_2, \\
\|u(\cdot, t)\nabla c(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C_{22}\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{22}\|\nabla c(\cdot, s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\|c(\cdot, s)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \leq K_3,
\end{aligned}$$

para cada $t \in (0, T_{max})$. Tomando $t > 2\tau$, tenemos que $(t-\tau)^{-1} \leq \tau^{-1}$. Así,

$$\begin{aligned}
\|\nabla c(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq &\, C_3(1 + \tau^{-1})K_1 + C_3K_2\int_\tau^t \left(1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{4}}e^{-\lambda_1(t-\tau)}\right) \\
&+ C_3K_3M(T)^{\frac{1}{2}}\int_\tau^t \left(1 + (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\lambda_1(t-\tau)}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existen $K_4, K_5 \geq 0$ tales que

$$M(T) \leq K_4 + K_5M(T)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el lema 2.6.10, vemos que

$$M(T) \leq \text{máx}\{2K_4, (2K_5)^2\}, \text{ para cada } T \in (2\tau, T_{\text{máx}}),$$

consiguiéndose lo deseado. ■

Lema 4.7.10. Para cada $i = 1, 2$, existe una constante $C_{27} > 0$ tal que

$$\|n_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{27}, \text{ para todo } t \in (0, T_{max}).$$

Demostración:

Sabemos que $n_1 \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}))$, si probamos que existe un $\tau_1 \in (0, T_{max})$ tal que

$$\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{28}(\tau_1), \text{ para todo } t \in (\tau_1, T_{max}),$$

conseguiríamos de manera inmediata que para todo $t \in (0, T_{max})$

$$\|n_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{máx}\left\{\sup_{\overline{\Omega}\times[0,\tau_1]} |n_1|, C_{28}(\tau_1)\right\} := C_{27}.$$

Probemos este resultado. De nuestro sistema tenemos la igualdad

$$(n_1)_t = (\Delta - 1)n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) + n_1.$$

De la fórmula de variación de parámetros, obtenemos que para todo $t \in (\tau, T_{max})$

$$\begin{aligned} n_1(t) &= e^{\left(t-\frac{\tau}{2}\right)(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right) - \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)} \nabla \cdot (n_1 \chi_1 \nabla c + n_1 u) \\ &+ \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)} [\mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2) + n_1] \qquad =: J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.7.15, tomando $p > 2$ y $\eta > \frac{1}{p}$, conseguimos

$$\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\|e^{\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_4 \left\|(-\Delta + 1)^\eta e^{(t-\frac{\tau}{2})(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Usando el postulado 2 del Lema 2.7.15, tenemos que

$$C_4 \left\|(-\Delta + 1)^\eta e^{(t-\frac{\tau}{2})(\Delta-1)} n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 C_5 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^{-\eta} e^{-\lambda_2 t} \left\|n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Como $t > \tau$ entonces $t - \frac{\tau}{2} > \frac{\tau}{2}$, con lo que $(t - \frac{\tau}{2})^{-\eta} < 2^\eta \tau^{-\eta}$. Por el Lema 4.7.7, observamos que $\left\|n_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{20}(p)$. Por lo tanto, concluimos que

$$\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} < C_4 C_5 2^\eta \tau^{-\eta} C_{20}(p).$$

Ahora, analicemos J_2. Aplicando nuevamente el primer enunciado del Lema 2.7.15 se consigue

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} \|e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c + n_1 u)(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds\\ &\leq C_4\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}-\eta\right)$ y aplicando el postulado 3 del Lema 2.7.15, llegamos a que

$$\begin{aligned}&C_4\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &\qquad\leq C_4C_6\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}(t-s)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3(t-s)}\|n_1\chi_1\nabla c+n_1u\|_{L^p(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Por el Lema 4.7.7, Lema 4.7.8 y Lema 4.7.9, existe $C_{29}>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|n_1\chi_1\nabla c+n_1u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \chi_1\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^\infty(\Omega)}+\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \chi_1\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|c\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|n_1\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}<C_{29}.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_4C_6C_{29}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\|(-\Delta+1)e^{(t-s)(\Delta-1)}\nabla\cdot(n_1\chi_1\nabla c+n_1u)\|_{L^p(\Omega)}ds\\ &\leq C_4C_6\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}(t-s)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3(t-s)}ds\\ &= C_4C_6\int_0^{\frac{\tau}{2}}(r)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3 r}dr\\ &\leq C_4C_6\int_0^{\infty}(r)^{-\eta-\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_3 r}dr<\infty.\end{aligned}$$

Ahora, observemos que

$$\mu_1n_1(1-n_1-a_1n_2)+n_1 \leq \mu_1n_1-\mu_1n_1^2+n_1=(1+\mu_1)n_1-\mu_1n_1^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}J_3 &= \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}[\mu_1n_1(1-n_1-a_1n_2)+n_1](\cdot,s)ds\\ &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}[(1+\mu_1)n_1-\mu_1n_1^2](\cdot,s)ds\\ &\leq \int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)(\Delta-1)}\left[-\mu_1\left(n_1-\frac{1+\mu_1}{2\mu_1}\right)^2+\frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\right](\cdot,s)ds\\ &\leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}ds.\end{aligned}$$

Del principio del máximo, tenemos que

$$e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)} \leq \|e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}\|_{C^0} \leq \|e^{-(t-s)}\|_{C^0} = e^{-(t-s)}.$$

Luego,

$$\frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{(t-s)\Delta}e^{-(t-s)}ds \leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} e^{-(t-s)}ds \leq \frac{(1+\mu_1)^2}{4\mu_1}(1-e^{-\frac{\tau}{2}}).$$

Finalmente, concluimos que existe un $C_{30}(\tau) > 0$ tal que

$$n_1(t) \leq J_1 + J_2 + J_3 \leq \|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} + J_3 \leq C_{30}(\tau),$$

cumpliéndose así lo que se quería. ■

Prueba del Teorema 4.2.1:
Sabemos que existe una constante $k > 0$ tal que $\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq k|\Omega|^{\frac{1}{p}}\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. Por el Lema 4.7.8, Lema 4.7.9, Lema 4.7.10 y tomando $t < T_{max}$ lo suficientemente cerca a T_{max}, conseguimos que

$$\begin{aligned}\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|n_2(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|A^\sigma u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq 2C_{27} + C_{24} + k\|\Omega\|^{\frac{1}{p}}C_{24} + C_{21}(\sigma_1) < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema 4.2.3, tenemos que $T_{max} = \infty$, cumpliéndose así lo deseado.

4.8. Sobre la estabilidad de la concentración de especies

En esta sección vamos a mostrar un estimativo para la estabilización de (4-1) para $a_1, a_2 \in (0,1)$. Para tal propósito, inicialmente tenemos el siguiente lema.

Lema 4.8.1. Sean $a_1, a_2 \in (0,1)$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Para la solución de (4-1), existen constantes positivas $\hbar_1$, ℓ_1 y ε_1 tales que las funciones no negativas E_1 y F_1, definidas como

$$\begin{aligned}E_1 &:= \int_\Omega \left(n_1 - N_1^*\log\frac{n_1}{N_1^*}\right) + \hbar_1\int_\Omega\left(n_2 - N_2^*\log\frac{n_2}{N_2^*}\right) + \frac{\ell_1}{2}\int_\Omega c^2,\\ F_1 &:= \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 + \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2,\end{aligned}$$

cumplen que, para cada $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq -\varepsilon_1 F_1(t). \tag{4-54}$$

Aquí $N_1^* := \dfrac{1-a_1}{1-a_1a_2}$ y $N_2^* := \dfrac{1-a_2}{1-a_1a_2}$.

Demostración:

Fijemos por ahora $\hbar_1, \ell_1 > 0$ y denotemos por A_1, A_2 y B_1 a las funciones definidas como

$$A_i(t) := \int_\Omega \left(n_i - N_i^* \log \frac{n_i}{N_i^*} \right), \quad \text{para } i = 1, 2,$$
$$B_1(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega c^2.$$

Así, podemos reescribir a $E_1(t)$ como sigue

$$E_1(t) = A_1(t) + \hbar_1 A_2(t) + \ell_1 B_1(t). \tag{4-55}$$

Definamos $H(s) := s - N_1^* \log(s)$ con $s > 0$. Observemos que podemos reescribir a A_1 en términos de $H(s)$ como sigue

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \int_\Omega n_1 - N_1^*(\log(n_1) - \log(N_1^*)) \\ &= \int_\Omega H(n_1) + N_1^* \log(N_1^*) - N_1^* + N_1^* \\ &= \int_\Omega H(n_1) - H(N_1^*) + N_1^*. \end{aligned} \tag{4-56}$$

Asuma que $n_1(x,t) > N_1^*$, usando la fórmula de Taylor sobre H con centro en N_1^*, aplicando la forma de Lagrange para el residuo y teniendo en cuenta que $H'(N_1^*) = 0$ conseguimos que

$$\begin{aligned} H(n_1) - H(N_1^*) =& H'(N_1^*)(n_1(x,t) - N_1^*) + \frac{1}{2} H''(z)(n_1(x,t) - N_1^*)^2 \\ =& \frac{N_1^*}{2z^2}(n_1(x,t) - N_1^*)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

para algún z que pertenece al intervalo $(N_1^*, n_1(x,t))$. En caso de que $n_1(x,t) \leq N_1^*$ se procede de manera similar. Así, se concluye que $A_1(t) \geq 0$.

Ahora, al usar la primera ecuación de (4-1) llegamos a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_1(t) =& \frac{d}{dt} \int_\Omega n_1 - N_1 \log \frac{n_1}{N_1^*} \\ =& \int_\Omega (n_1)_t - \frac{N_1^*}{n_1}(n_1)_t \\ =& \int_\Omega (n_1)_t \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1}\right) \\ =& \int_\Omega (\Delta n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2)) \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1}\right). \end{aligned} \tag{4-57}$$

A continuación realizamos un análisis en cada uno de los términos de la integral previa.

$$\int_\Omega \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1}\right) \Delta n_1 = -\int_\Omega \nabla n_1 \cdot \nabla \left(1 - \frac{N_1^*}{n_1}\right) = -\int_\Omega \nabla n_1 \cdot N_1^* \frac{\nabla n_1}{n_1^2} = -N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2}.$$

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) u\cdot\nabla n_1 =& -\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_1(n_1)_x+u_2(n_1)_y] \\
=& -\left(\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_1(n_1)_x]+\int_\Omega \left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)[u_2(n_1)_y]\right) \\
=& \int_\Omega \left[\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)_x u_1+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)(u_1)_x\right] n_1 \\
&+\int_\Omega \left[\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)_y u_2+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)(u_2)_y\right] n_1 \\
=& \int_\Omega n_1\nabla\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\cdot u+\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)n_1\nabla\cdot u \\
=& \int_\Omega n_1 N_1^*\frac{\nabla n_1}{n_1^2}\cdot u \\
=& N_1^*\int_\Omega \frac{\nabla n_1}{n_1}\cdot u \\
=& N_1^*\int_\Omega \nabla\log(n_1)\cdot u \\
=& -N_1^*\int_\Omega \log(n_1)\nabla\cdot u=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla\cdot(n_1\nabla c) =& -\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c-\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)n_1\Delta c \\
=& -\int_\Omega \chi_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c+\int_\Omega \chi_1\nabla\left(n_1\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\right)\cdot\nabla c \\
=& \int_\Omega \chi_1 n_1\nabla\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right)\cdot\nabla c \\
=& \int_\Omega \chi_1 n_1 N_1^*\frac{\nabla n_1}{n_1^2}\cdot\nabla c \\
=& \chi_1 N_1^*\int_\Omega \frac{\nabla n_1}{n_1}\cdot\nabla c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mu_1 n_1(1-n_1-a_1n_2)\left(1-\frac{N_1^*}{n_1}\right) =& \int_\Omega \mu_1 n_1(1-n_1+N_1^*-N_1^*-a_1n_2)\,(n_1-N_1^*) \\
=& -\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)^2 \\
&+\mu_1\int_\Omega (1-N_1-a_1n_2)(n_1-N_1^*) \\
=& -\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)^2 \\
&-a_1\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)(n_2-N_2^*).
\end{aligned}
$$

Reemplazando las igualdades previas en (4-57) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_1(t) = &-\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)^2 - a_1\mu_1\int_\Omega (n_1-N_1^*)(n_2-N_2^*) - N_1^*\int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2}\\ &+N_1^*\chi_1\int_\Omega \frac{\nabla n_1\cdot\nabla c}{n_1}.\end{aligned}\tag{4-58}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_2(t) = &-\mu_2\int_\Omega (n_2-N_2^*)^2 - a_2\mu_2\int_\Omega (n_1-N_1^*)(n_2-N_2^*) - N_2^*\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2}\\ &+N_2^*\chi_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2}.\end{aligned}\tag{4-59}$$

Aplicando las fórmulas de Green, integración por partes y teniendo en cuenta la tercera ecuación del sistema (4-1) concluimos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_1(t) &= \int_\Omega c(c)_t\\ &=\int_\Omega c(-u\cdot\nabla c+\Delta c-(\alpha n_1+\beta n_2)c)\\ &=-\int_\Omega |\nabla c|^2-\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c^2.\end{aligned}\tag{4-60}$$

Dada la positividad de las funciones n_1, n_2 y c, usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon=1$, la igualdad $\frac{\nabla n_1}{n_1}=\nabla\log(n_1)$ y las ecuaciones (4-58), (4-59) y (4-60) sobre la derivada con respecto a t de (4-55), conseguimos la existencia de una constante $C_1>0$ verificando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_1(t) \leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_1^*\chi_1 \int_\Omega \frac{\nabla n_1 \cdot \nabla c}{n_1} \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_2^*\chi_2 k_1 \int_\Omega \frac{\nabla n_2 \cdot \nabla c}{n_2} \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 - N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2} - N_2^* k_1 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} \\
\leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_1^* \left(\int_\Omega \frac{|\nabla n_1|}{n_1} |\chi_1 \nabla c| \right) \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + N_2^* k_1 \left(\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|}{n_2} |\chi_2 \nabla c| \right) \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 - N_1^* \int_\Omega \frac{|\nabla n_1|^2}{n_1^2} - N_2^* k_1 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} \\
\leq & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - a_1\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + \frac{N_1^*\chi_1^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 - a_2\mu_2 k_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) + \frac{k_1 N_2^* \chi_2^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
& - \ell_1 \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
= & -\mu_1 \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 k_1) \int_\Omega (n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \\
& - \mu_2 k_1 \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 + \left(\frac{N_1^*\chi_1^2}{4} + \frac{k_1 N_2^* \chi_2^2}{4} - \ell_1 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned}$$

De lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_1(t) \leq & \int_\Omega (-\mu_1(n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 k_1)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \\
& - k_1\mu_2(n_1 - N_1^*)) + \left(\frac{N_1^*\chi_1^2}{4} + \frac{k_1 N_2^* \chi_2^2}{4} - \ell_1 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned} \tag{4-61}$$

Tomando $\varepsilon \in (0, \mu_1)$ y usando la desigualdad de Cauchy con $\varphi = \mu_1 - \varepsilon$, vemos que

$$\begin{aligned}
-(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \leq & |(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*)| \\
\leq & \frac{1}{4(\mu_1 - \varepsilon)} (a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2 + (\mu_1 - \varepsilon)(n_1 - N_1^*)^2 \\
= & -\varepsilon(n_1 - N_1^*)^2 + \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} + \mu_1(n_1 - N_1^*)^2.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-\mu_1(n_1 - N_1^*)^2 - (a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)(n_1 - N_1^*)(n_2 - N_2^*) \leq & -\varepsilon(n_1 - N_1^*)^2 \\
& + \frac{(a_1\mu_1 + k_1 a_2\mu_2)^2 (n_2 - N_2^*)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\mu_1(n_1-N_1^*)^2-(a_1\mu_1+\not{k}_1a_2\mu_2)(n_1-N_1^*)(n_2-N_2^*)-\not{k}_1\mu_2(n_2-N_2^*)^2$$
$$\leq -\varepsilon(n_1-N_1^*)^2-\underbrace{\left(k_1\mu_2-\frac{(a_1\mu_1+\not{k}_1a_2\mu_2)^2}{4(\mu_1-\varepsilon)}\right)}_{:=\varsigma}(n_2-N_2^*)^2. \quad (4\text{-}62)$$

Teniendo en cuenta que $a_1,a_2\in(0,1)$, sabemos que existe $\varepsilon_0\in(0,\mu_1)$ lo suficientemente pequeño tal que

$$a_1\mu_1<\frac{\mu_1}{a_2}-\frac{\varepsilon_0}{a_2}.$$

De lo anterior, conseguimos la desigualdad $\dfrac{1}{a_2}>\dfrac{a_1\mu_1}{\mu_1-\varepsilon_0}$. Luego, al tomar $k_1=a_1a_2$ observamos que

$$\varsigma=k_1\mu_2-\frac{(a_1\mu_1+\not{k}_1a_2\mu_2)}{4(\mu_1-\varepsilon_0)}=\frac{a_1\mu_1}{a_2}-\frac{a_1^2\mu_1^2}{\mu_1-\varepsilon_0}>0.$$

Así, eligiendo $\ell_1>\dfrac{N_1^*\chi_1^2}{4}+\dfrac{\not{k}_1N_2^*\chi_2^2}{4}$ obtenemos (4-54) de (4-61) y (4-62). ■

Lema 4.8.2. Sean $a_1,a_2\in(0,1)$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces. existe una constante $C_{31}>0$ verificando la desigualdad

$$\int_0^\infty\int_\Omega(n_1-N_1)^2+\int_0^\infty\int_\Omega(n_2-N_2)^2\leq C_{31}.$$

Demostración:

Tome $t>0$, integrando (4-54) sobre $(0,t)$, teniendo en cuenta la no negatividad de E_1 y haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo conseguimos que

$$-E_1(0)\leq E_1(t)-E_1(0)\leq-\varepsilon_1\int_0^t F_1(s)ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t F_1(s)ds\leq\frac{1}{\varepsilon_1}E_1(0)$$

para cada $t>0$. Por consiguiente, tomando $t\to\infty$ demostramos lo deseado. ■

Lema 4.8.3. Sean $a_1\geq 1>a_2$ y asuma las mismas hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces, existen constantes positivas $\not{k}_2$, ℓ_2 y ε_2 tales que para las funciones no negativas E_2 y F_2, definidas como

$$E_2:=\int_\Omega n_1+\not{k}_2\int_\Omega(n_2+\log n_2)+\frac{\ell_2}{2}\int_\Omega c^2 \quad (4\text{-}63)$$

y

$$F_2:=\int_\Omega n_1^2+\int_\Omega(n_2-1)^2, \quad (4\text{-}64)$$

cumplen la desigualdad

$$\frac{d}{dt}E_2(t)\leq-\varepsilon_2F_2(t) \quad (4\text{-}65)$$

para cada $t>0$.

Demostración:

Definamos las funciones

$$A_3(t) := \int_\Omega n_1, \quad A_4(t) := \int_\Omega (n_2 - \log n_2), \quad B_2(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega c^2.$$

Entonces, fijando de manera momentánea las constantes $\Bbbk_2, \ell_2 > 0$, reescribimos la expresión (4-63) como

$$E_2(t) = A_3(t) + \Bbbk_2 A_4(t) + \ell_2 B_2(t). \tag{4-66}$$

Definiendo $H(s) := s - \log s$ con $s > 0$ y realizando un procedimiento análogo al encontrado en (4-56) vemos que A_4 es no negativa. Ahora, teniendo en cuenta la primera ecuación de nuestro sistema (4-1), usando el hecho de que $a_1 \geq 1$, aplicando integración por partes, fórmulas de Green y condiciones en la frontera, obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_3 =& \int_\Omega (n_1)_t \\
=& \int_\Omega (-u\cdot\nabla n_1 + \Delta n_1 - \chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2)) \\
\leq& -\int_\Omega u\cdot\nabla n_1 + \int_\Omega \Delta n_1 - \chi_1\int_\Omega \nabla\cdot(n_1\nabla c) + \mu_1\int_\Omega n_1(1 - n_1 - n_2) \\
=& \int_\Omega n_1\nabla\cdot u + \int_{\partial\Omega}\partial_\nu n_1 dS - \chi_1\int_\Omega \nabla n_1\cdot\nabla c \\
&- \chi_1\int_\Omega n_1\Delta c + \mu_1\int_\Omega (n_1(1-n_2) - n_1^2) \\
=& \chi_1\int_\Omega n_1\cdot\Delta c - \chi_1\int_\Omega n_1\Delta c + \mu_1\int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1\int_\Omega n_1^2.
\end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\frac{d}{dt}A_3 \leq \mu_1\int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1\int_\Omega n_1^2. \tag{4-67}$$

Por otro lado, de la segunda ecuación del sistema (4-1) llegamos a la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_4 =& \int_\Omega (n_2)_t - \frac{1}{n_2}(n_2)_t \\
=& \int_\Omega (-u\cdot\nabla n_2 + \Delta n_2 - \chi_2\nabla\cdot(n_2\nabla c) + \mu_2 n_2(1 - a_2 n_1 - n_2))\left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right).
\end{aligned} \tag{4-68}$$

Realizando un análisis a cada término resultante de la igualdad anterior y usando integración por partes, observamos que

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u\cdot\nabla n_2\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) &= \int_\Omega n_2\nabla\cdot\left(\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)u\right)\\
&= \int_\Omega n_2\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\cdot u\\
&= \int_\Omega n_2\left(\frac{\nabla n_2}{n_2^2}\right)\cdot u\\
&= \int_\Omega \frac{\nabla n_2}{n_2}\cdot u\\
&= \int_\Omega \nabla\log n_2\cdot u\\
&= -\int_\Omega \log n_2\nabla\cdot u = 0.
\end{aligned}
\tag{4-69}
$$

Usando las fórmulas de Green tenemos que

$$
\int_\Omega \Delta n_2\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = -\int_\Omega \nabla n_2\cdot\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = -\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2}. \tag{4-70}
$$

De la integración por partes conseguimos

$$
-\chi_2\int_\Omega \nabla\cdot(n_2\nabla c)\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = \chi_2\int_\Omega n_2\nabla c\cdot\nabla\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right) = \chi_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2}. \tag{4-71}
$$

Reemplazando (4-69), (4-70), (4-71) en (4-68) obtenemos que

$$
\frac{d}{dt}A_4 = -\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} + \chi_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2} - \mu_2\int_\Omega (n_2-1)^2 - a_2\mu_2\int_\Omega n_1(n_2-1). \tag{4-72}
$$

Realizando el mismo razonamiento hecho en (4-60) obtenemos

$$
\frac{d}{dt}B_2(t) = -\int_\Omega |\nabla c|^2 - \int_\Omega c^2(\alpha n_1+\beta n_2). \tag{4-73}
$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta , (4-67), (4-72), (4-73), conseguimos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2 =& \frac{d}{dt}A_3 + \hbar_2\frac{d}{dt}A_4 + \ell_2\frac{d}{dt}B_2\\
\leq& \mu_1\int_\Omega n_1(1-n_2) - \mu_1\int_\Omega n_1^2 - \hbar_2\int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2} + \chi_2\hbar_2\int_\Omega \frac{\nabla n_2\cdot\nabla c}{n_2}\\
&- \mu_2\hbar_2\int_\Omega (n_2-1)^2 - a_2\mu_2\hbar_2\int_\Omega n_1(n_2-1) - \ell_2\int_\Omega |\nabla c|^2\\
&- \ell_2\int_\Omega c^2(\alpha n_1+\beta n_2).
\end{aligned}
\tag{4-74}
$$

Usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\chi_2 \bar{k}_2 \int_\Omega \frac{\nabla n_2 \cdot \nabla c}{n_2} \leq & \chi_2 \bar{k}_2 \int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right| |\nabla c| \\
\leq & \bar{k}_2 \left(\int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right| |\chi_2 \nabla c| \right) \\
\leq & \bar{k}_2 \left(\int_\Omega \frac{1}{4} |\chi_2 \nabla c|^2 + \int_\Omega \left| \frac{\nabla n_2}{n_2} \right|^2 \right) \\
\leq & \frac{\bar{k}_2 \chi_2^2}{4} \int_\Omega |\nabla c|^2 + \bar{k}_2 \int_\Omega \frac{|\nabla n_2|^2}{n_2^2}.
\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (4-74) y teniendo en cuenta que $\ell_2, c, n_1, n_2 > 0$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2 \leq & - \mu_1 \int_\Omega n_1^2 - (\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2) \int_\Omega n_1 (n_2 - 1) \\
& - \mu_2 \bar{k}_2 \int_\Omega (n_2 - 1)^2 + \left(\frac{\bar{k}_2 \chi_2^2}{4} - \ell_2 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2.
\end{aligned} \tag{4-75}$$

Además, de la desigualdad de Cauchy con $\varphi = \mu_1 - \varepsilon$ y $\varepsilon \in (0, \mu_1)$, observamos que

$$\begin{aligned}
-(\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2) n_1 (n_2 - 1) \leq & |(\mu_1 + a_1 \mu_2 \bar{k}_2) n_1 (n_2 - 1)| \\
\leq & \frac{1}{4(\mu_1 - \varepsilon)} (\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2)^2 (n_2 - 1)^2 + (\mu_1 - \varepsilon) n_1^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$-\mu_1 \int_\Omega n_1^2 - \int_\Omega (\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2) n_1 (n_2 - 1) \leq -\varepsilon \int_\Omega n_1^2 + \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \int_\Omega (n_2 - 1)^2. \tag{4-76}$$

Reemplazando (4-76) en (4-74) y tomando $\ell_2 > \frac{\bar{k}_2 \chi_2^2}{4}$, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2 \leq & - \varepsilon \int_\Omega n_1^2 - \left(\mu_2 \bar{k}_2 - \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \right) \int_\Omega (n_2 - 1)^2 \\
& + \left(\frac{\bar{k}_2 \chi_2^2}{4} - \ell_2 \right) \int_\Omega |\nabla c|^2 \\
\leq & - \varepsilon \int_\Omega n_1^2 - \left(\mu_2 \bar{k}_2 - \frac{(\mu_1 + a_2 \mu_2 \bar{k}_2)^2}{4(\mu_1 - \varepsilon)} \right) \int_\Omega (n_2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\varepsilon \in (0, (1 - a_2)\mu_1)$ tal que $\bar{k}_2 = \frac{\mu_1}{4(\mu_1 - \varepsilon)}$, obtenemos la desigualdad (4-65). ■

Lema 4.8.4. Sean $a_1 \geq 1 > a_2$ y asuma las hipótesis del Teorema 4.2.1. Entonces, existe una constante $C_{32} > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \int_\Omega n_1^2 + \int_0^\infty \int_\Omega (n_2 - 1)^2 \leq C_{32}.$$

Demostración:

Tomando $t > 0$, integrando sobre $(0, t)$ en (4-65) y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, conseguimos la desigualdad

$$E_2(t) - E_2(0) \leq -\varepsilon_2 \int_0^t F(s)ds.$$

Usando lo anterior y la no negatividad de E_2, tenemos que

$$\varepsilon_2 \int_0^t F(s)ds \leq E_2(t) + \varepsilon_2 \int_0^t F(s)ds \leq E_2(0).$$

Dado que $t > 0$ es arbitrario, obtenemos lo deseado. ■

Lema 4.8.5. Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, existe $C_{33} > 0$ y $\theta_0 > 0$ tales que

$$\|n_i\|_{C^{\theta_0, \frac{\theta_0}{2}}(\overline{\Omega} \times [t, t+1])} \leq C_{33},$$

para todo $t \geq 1$ e $i = 1, 2$.

Demostración:

Reescribiendo la primera ecuación de (4-1) conseguimos la igualdad

$$(n_1)_t - \nabla \cdot \underbrace{(\nabla n_1 - \chi_1 n_1 \nabla c)}_{:=a(x,t,n_1,\nabla n_1)} = \underbrace{u \cdot \nabla n_1 + \mu_1 n_1 (1 - n_1 - a_1 n_2)}_{b(x,t,n_1,\nabla n_1)}.$$

Observemos que, por los valores iniciales y de la frontera de n_1, vemos que

$$\begin{aligned}
&(\nabla n_1 - \chi_1 n_1 \nabla c) \cdot \nu = \partial_\nu n_1 - \chi_1 n_1 \partial_\nu c = 0, \\
&n_1(\cdot, 0) = n_1, 0.
\end{aligned}$$

Tomando $t \geq 1$, $p = 2$ y $\Phi = 1$ en el Teorema 1.3 de [58], obtenemos lo que se desea. ■

Lema 4.8.6. Sea $n \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ tal que para algunos $C^* > 0$ y $\theta^* > 0$ se satisface la desigualdad

$$\|n\|_{C^{\theta^*, \frac{\theta^*}{2}}(\overline{\Omega} \times [t, t+1])} \leq C^*.$$

Supongamos que

$$\int_0^\infty \int_\Omega (n(x, t) - N^*)^2 dxdt < \infty \tag{4-77}$$

para alguna constante $N^* > 0$. Entonces,

$$n(\cdot, t) \to N^* \text{ en } C^0(\overline{\Omega}) \text{ cuando } t \to \infty.$$

Demostración:

Definamos $n[j](x,s) := n(x, j+s)$ con $x \in \overline{\Omega}$ y $s \in [0,1]$. Veamos que el conjunto $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ es compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$. De la condición de Hölder, conseguimos que

$$|n[j](x_1,t_1) - n[j](x_2,t_2)| \le C^*(|x_1-x_2|^{\theta^*}) + |t_1-t_2|^{\frac{\theta^*}{2}}),$$

para cada $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ y $j \in \mathbb{N}$. De lo cual, vemos que dado un $\varepsilon > 0$ existirá un $\delta > 0$ tal que si $(|x_1-x_2|^2 + |t_1-t_2|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$, entonces

$$|n[j](x_1,t_1) - n[j](x2,j_2)| < \varepsilon.$$

Luego $(n[j])_{j\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua. Usando el Teorema de Arzelà-Ascoli, $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ será, en efecto, compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$.

Razonando por reducción al absurdo, suponga que $n[j]$ no converge a N^* en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$ cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, existirá un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para una subsucesión $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ verificando $j_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ tenemos la desigualdad

$$\|n[j_k] - N^*\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} > \varepsilon_0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $(n[j])_{j\in\mathbb{N}}$ es un conjunto compacto en $C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$, entonces particularmente lo será $(n[j_k])_{k\in\mathbb{N}}$. De esta manera, existirán una subsucesión $(n[j_{k_r}])_{r\in\mathbb{N}}$ y una función $n_\infty \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])$ tal que

$$\|n[j_{k_r}] - n_\infty\|_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} \to 0 \text{ cuando } r \to \infty. \tag{4-78}$$

Por la hipótesis (4-77), tenemos que

$$\int_0^1 \int_\Omega |n[j](x,s) - N^*|^2 dxds = \int_j^{j+1} \int_\Omega |n(x,t) - N^*|^2 dxdt \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Por otro lado, de (4-78) tenemos lo siguiente

$$\int_0^1 \int_\Omega |n[j_{k_r}](x,s) - n_\infty|^2 dxds \le |\Omega| \|n[j_{k_r}] - n_\infty\|^2_{C^0(\overline{\Omega}\times[0,1])} \to 0 \text{ cuando } r \to \infty.$$

Por unicidad del límite se sigue que $n_\infty = N^*$. Por consiguiente, llegamos a una contradicción puesto que la convergencia (4-78) contradice la desigualdad (4.8). En particular

$$\sup_{s\in[0,1]} \|n[j](\cdot,s) - N^*\|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Entonces, $n(\cdot,t) \to N^*$ en $C^0(\overline{\Omega})$ cuando $t \to \infty$. ■

Lema 4.8.7. Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.2.1, tenemos que

1. Si $a_1, a_2 \in (0,1)$, entonces

$$\|n_1(\cdot,t) - N_1^*\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \quad \|n_2(\cdot,t) - N_2^*\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty,$$

donde $N_1^* := \frac{1-a_1}{1-a_1a_2}$, $N_2^* := \frac{1-a_2}{1-a_1a_2}$.

2. Si $a_1 \ge 1 > a_2$, entonces

$$\|n_1(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \|n_2(\cdot,t) - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Demostración:

1) Asumamos que $a_1, a_2 \in (0,1)$. Del Lema 4.8.2, tenemos que

- $\displaystyle\int_0^\infty \int_\Omega (n_1 - N_1^*)^2 \leq C_{31}$,
- $\displaystyle\int_0^\infty \int_\Omega (n_2 - N_2^*)^2 \leq C_{31}$.

Las hipótesis del Lema 4.8.6 son garantizadas gracias al Lema 4.8.5. Por lo tanto, para $i = 1, 2$, vemos que

$$n_i(\cdot, t) \to N_i^* \text{ en } C^0(\overline{\Omega}) \text{ cuando } t \to \infty.$$

2) Para el caso $a_1 \geq 1 > a_2$, usamos el Lema 4.8.4 y procedemos de manera similar al primer caso. ■

Lema 4.8.8. Sea $a_2 \in (0,1)$. Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.1, tenemos que para todo $C \in (0, |\Omega| \min\{N_2^*, 1\})$ existirá un $T > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq C \text{ para todo } t > T.$$

Demostración:

Si $a_1, a_2 \in (0,1)$, entonces del Lema 4.8.7 vemos que

$$\int_\Omega n_2 \to \int_\Omega N_2 = N_2|\Omega| \text{ cuando } t \to \infty.$$

De lo anterior, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existirá $T_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq N_2|\Omega| - \varepsilon \text{ para todo } t > T_1.$$

En caso de que $a_1 \geq 1 > a_2$, tendremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $T_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega n_2 \geq |\Omega| - \varepsilon \text{ para cada } t > T_2.$$

■

4.9. Sobre la estabilidad de la concentración química

Lema 4.9.1. Para $\alpha, \beta, n_1, n_2, c$ satisfaciendo el sistema (4.2.1), tenemos que

$$\int_0^\infty (\alpha n_1 + \beta n_2)c < \infty.$$

Demostración:

Integrando la tercera ecuación del sistema (4.2.1) sobre Ω, haciendo uso de las fórmulas de Green y de la integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega c &= -\int_\Omega u\cdot\nabla c + \int_\Omega \Delta c - \int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c\\ &= \int_\Omega c\nabla\cdot u + \int_{\partial\Omega}\partial_\nu c - \int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c\\ &= -\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c.\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,t)$ en la anterior desigualdad, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo y usando el hecho de que $c>0$, conseguimos que

$$-\int_0^t\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c = \int_0^t\frac{d}{dt}\int_\Omega c = \int_\Omega c(\cdot,t) - \int_\Omega c_0 \geq -\int_\Omega c_0.$$

Y así,

$$\int_0^t\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c \leq \int_\Omega c_0 < \infty.$$

■

Lema 4.9.2. Existe una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$ tal que $t_k\to\infty$ y

$$\int_{t_k}^{t_k+1}\int_\Omega c \to 0 \text{ cuando } k\to\infty. \tag{4-79}$$

Demostración:

Del Lema 4.9.1, tenemos que

$$\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c\to 0 \text{ cuando } j\to\infty.$$

Denotemos por $f(t):=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega c(\cdot,t)dx$ para cada $t>0$, entonces

$$\begin{aligned}\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)c = &\underbrace{\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)(c(\cdot,t)-f(t))dxdt}_{:=I_1(j)}\\ &+\underbrace{\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)f(t)dxdt}_{I_2(j)}.\end{aligned} \tag{4-80}$$

Por la desigualdad de Cauchy podemos estimar a $I_1(j)$

$$I_1(j)\leq\left(\int_j^{j+1}\int_\Omega(\alpha n_1+\beta n_2)^2\right)^{\frac12}\cdot\left(\int_j^{j+1}\int_\Omega|c(\cdot,t)-f(t)|^2\right)^{\frac12},$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.
Por la Desigualdad de Poincare-Wirtinger conseguimos una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega |c(\cdot,t) - f(t)|^2 \, dxdt \leq C_1 \int_j^{j+1} \int_\Omega |\nabla c(\cdot,t)| \, dxdt.$$

Por el Lema 4.7.2, vemos que

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega |\nabla c|^2 \to 0 \text{ cuando } j \to \infty. \tag{4-81}$$

Y por el Lema 4.7.1, conseguimos

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_j^{j+1} \int_\Omega n_i^2 < \infty. \tag{4-82}$$

Por lo tanto, de (4-80) observamos que $I_2(j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.
Definamos $\overline{n_0} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega n_0 > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} I_2(j) &:= \int_j^{j+1} \int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) f(t) dxdt \\ &= \int_j^{j+1} f(t) \left(\int_\Omega (\alpha n_1 + \beta n_2) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Por los Lemas 4.8.7 y 4.8.8 conseguimos que, necesariamente,

$$\int_j^{j+1} \int_\Omega c(x,t) dxdt \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Luego, vemos que la sucesión $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$, donde $c_j(x,s) := c(x, j+s)$ para cada $(x,s) \in \Omega \times (0,1)$ y $j \in \mathbb{N}$, satisface $c_j \to 0$ en $L^1(\Omega \times (0,1))$ cuando $j \to \infty$. Entonces, podemos tomar una subsucesión $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $j_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y satisfaciendo $c_{j_k} \to 0$ c.t.p en $\Omega \times (0,1)$ cuando $k \to \infty$. Además, por el Lema 4.7.2 sabemos que $(c_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(\Omega \times (0,1))$. Así, por el Teorema 2.1.17 de la Convergencia Dominada conseguimos que $c_{j_k} \to 0$ en $L^1(\Omega \times (0,1))$ cuando $k \to \infty$, con lo cual garantizamos (4-79) al tomar $t_k := j_k$.

Lema 4.9.3. Existe una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ tal que $t_k \to \infty$ y

$$\int_{t_k}^{t_k+1} \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} dt \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Demostración:

Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_k \to \infty$. Por el Lema 4.7.2, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{t_k}^{t_k+1} \int_\Omega |\nabla c|^4 \leq C_1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2\|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}}\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} + C_2\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \tag{4-83}$$

para cada $\varphi \in W^{1,4}(\Omega)$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y fijemos $\delta > 0$ tal que $C_1^{\frac{1}{4}}\delta < \varepsilon$. Usando la desigualdad de Young con parámetros $p = \frac{5}{4}$ y $q = 5$, vemos que

$$\begin{aligned} C_2\|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}}\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} &= C_2\left\|\frac{5}{4C_2}\delta\nabla\varphi\right\|_{L^4(\Omega)}^{\frac{4}{5}}\left\|\left(\frac{4C_2}{5\delta}\right)^4\varphi\right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{5}} \\ &\leq \delta\|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{5}\left(\frac{4C_2}{5\delta}\right)^4\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (4-83), conseguimos $C_3 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta\|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)} + C_3\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}$$

para cada $\varphi \in W^{1,4}(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}dt \leq& \delta\int_{t_k}^{t_k+1}\|\nabla c(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}dt + C_3\int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}dt \\ \leq& \delta\left(\int_{t_k}^{t_k+1}\|\nabla c(\cdot,t)\|_{L^4(\Omega)}^4dt\right)^{\frac{1}{4}} + C_3\int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}dt \\ \leq& \delta C_1^{\frac{1}{4}} + C_3\int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}dt, \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta lo anterior y usando el Lema 4-79, obtenemos que

$$\limsup_{k\to\infty}\int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}dt < \varepsilon + C_3\limsup_{k\to\infty}\int_{t_k}^{t_k+1}\|c(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}dt = \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Esto demuestra lo deseado. ■

Lema 4.9.4. Tenemos que

$$\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \tag{4-84}$$

Demostración:

Como consecuencia del Lema 4-79 tenemos que $\liminf_{t\to\infty}\|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$. Por el Lema 4.7.2 sabemos que la función $t \to \|c(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ es decreciente en $(0,\infty)$, consiguiéndose (4-84), como queríamos. ■

4.10. Sobre la estabilidad de la velocidad del fluído

Lema 4.10.1. Para $p \geq 2$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_1^\infty \int_\Omega (n_i + 1)^{p-2} |\nabla n_i|^2 < \infty \text{ con } i = 1, 2. \tag{4-85}$$

Demostración:

Bastaría demostrar este resultado para $p > 2$ ya que por estimativas clásicas $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Así, $\frac{4p}{p-1} < 8$. Por lo tanto, podemos tomar $\delta \in (0, \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)})$ lo suficientemente pequeño tal que

$$p\chi_1\delta < 2 \tag{4-86}$$

y

$$p(p-1)\chi_1^2\delta^2 + \frac{4p}{p-1} < 8. \tag{4-87}$$

Usando (4-84), podemos tomar un t_0 lo suficientemente grande, tal que

$$c \leq \frac{\delta}{2} \text{ en } \Omega \times (t_0, \infty).$$

Luego, $\frac{(n_1+1)^p}{\delta - c}$ está bien definido y es suave sobre $\overline{\Omega} \times [t_0, \infty)$. Además, tomando $t > t_0$ y usando la primera y tercera ecuación de nuestro sistema (4-1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{\delta - c} &= \int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}(n_1)_t + \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta - c)^2} c_t \\
&= \int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}(\Delta n_1 - u \cdot \nabla n_1 - \chi_1 \nabla \cdot (n_1 \nabla c) + \mu_1 n_1(1 - n_1 - a_1 n_2)) \\
&\quad + \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta - c)^2}(\Delta c - u \cdot \nabla c - (\alpha n_1 + \beta n_2)c).
\end{aligned} \tag{4-88}$$

Ahora, procedemos a analizar cada término del lado derecho de la anterior igualdad. Por las fórmulas de Green sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{p(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\Delta n_1 &= -p\int_\Omega \nabla\left(\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\right) \cdot \nabla n_1 \\
&= -p(p-1)\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta - c}|\nabla n_1|^2 - p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{(\delta - c)^2}\nabla n_1 \cdot \nabla c.
\end{aligned} \tag{4-89}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
-p\chi_1 \int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\nabla \cdot (n_1 \nabla c) &= p\chi_1 \int_\Omega n_1 \nabla\left(\frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta - c}\right) \cdot \nabla c \\
&= p(p-1)\chi_1 \int_\Omega \frac{n_1(n_1+1)^{p-2}}{\delta - c}\nabla n_1 \cdot \nabla c + p\chi_1 \int_\Omega \frac{n_1(n_1+1)^{p-1}}{(\delta - c)^2}|\nabla c|^2.
\end{aligned} \tag{4-90}$$

Razonando de manera análoga notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}\Delta c =& -\int_\Omega \nabla\left(\frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}\right)\cdot\nabla c\\ =& -p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{(\delta-c)^2}\nabla n_1\cdot\nabla c - 2\int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^3}|\nabla c|^2.\end{aligned}\tag{4-91}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla\cdot u = 0$ e integrando por partes conseguimos que

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{p(n_1+1)^p}{\delta-c}u\cdot\nabla n_1 =& -\int_\Omega \frac{\nabla(n_1+1)^p}{\delta-c}\cdot u\\ =& \int_\Omega (n_1+1)^p\nabla\cdot\left(\frac{1}{\delta-c}u\right)\\ =& \int_\Omega (n_1+1)^p u\cdot\nabla\frac{1}{\delta-c}\\ =& \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p}{(\delta-c)^2}u\cdot\nabla c.\end{aligned}\tag{4-92}$$

Entonces, teniendo en cuenta las igualdades (4-89), (4-90), (4-91) y (4-92), conseguimos de (4-88) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(n+1)^p}{\delta-c} \le& -p(p-1)\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2\\ &-\int_\Omega (n_1+1)^p\left(\frac{2}{(\delta-c)^3}-\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}\right)|\nabla c|^2\\ &+\int_\Omega (n_1+1)^{p-1}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c\\ &+\mu_1 p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1.\end{aligned}\tag{4-93}$$

Observemos que

$$\frac{\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}}{\frac{2}{(\delta-c)^3}} = \frac{p\chi_1 n_1(\delta-c)}{2(n_1+1)} \le \frac{p\chi_1\delta}{2} < 1,$$

de lo cual vemos que el término que involucra a $|\nabla c|^2$ necesariamente es no positivo.
Por simplicidad, vamos a definir la función auxiliar

$$h(\eta,\xi) := \frac{\left(\frac{p(p-1)\chi_1\eta}{(\delta-\xi)(\eta+1)}-\frac{2p}{(\delta-\xi)^2}\right)^2}{4\left(\frac{2}{(\delta-\xi)^3}-\frac{p\chi_1\eta}{(\eta+1)(\delta-\xi)^2}\right)}$$

con $\eta \ge 0$ y $\xi \in [0,\delta)$.
Utilizando la desigualdad de Cauchy con

$$\varepsilon_0 = \frac{\frac{2}{(\delta-c)^3}-\frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}}{\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)}-\frac{2p}{\delta-c}\right)^2},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (n_1+1)^{p-1}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)} - \frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla n_1\cdot\nabla c \\
&= \int_\Omega \left[(n_1+1)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p(p-1)\chi_1 n_1}{(\delta-c)(n_1+1)} - \frac{2p}{(\delta-c)^2}\right)\nabla c\right]\cdot\left[(n_1+1)^{\frac{p-2}{2}}\nabla n_1\right] \\
&\leq \int_\Omega (n_1+1)^p\left(\frac{2}{(\delta-c)^3} - \frac{p\chi_1 n_1}{(n_1+1)(\delta-c)^2}\right)|\nabla c|^2 \\
&\quad + \int_\Omega (n_1+1)^{p-2}h(n_1,c)\nabla n_1.
\end{aligned} \tag{4-94}$$

Realizando unos cálculo simples conseguimos ver que

$$\frac{h(\eta,\xi)}{\frac{p(p-1)}{\delta-\xi}} = \frac{p(p-1)\chi_1^2(\delta-\xi)^2\frac{\eta}{(\eta+1)^2} - 4p\chi_1(\delta-\xi)\frac{\eta}{\eta+1} + \frac{4p}{p-1}}{8-4p\chi_1(\delta-\xi)\frac{\eta}{\eta+1}} := \frac{h_1(\eta,\xi)}{h_2(\eta,\xi)}.$$

Por (4-87), observamos que

$$\begin{aligned}
h_1(\eta,\xi) - h_2(\eta,\xi) &= p(p-1)\chi_1^2(\delta-\xi)^2\frac{\eta^2}{(\eta+1)^2} + \frac{4p}{p-1} - 8 \\
&\leq p(p-1)\chi_1^2\delta^2 + \frac{4p}{p-1} - 8 < 0.
\end{aligned}$$

Además, por (4-86),

$$h_2(n,c) \geq 8 - 4p\chi_1\delta > 0 \ \text{ en } \Omega\times(t_0,\infty),$$

de lo cual notamos que

$$\frac{h_1(n,c)}{h_2(n,c)} \leq 1 - \underbrace{\frac{8-p(p-1)\chi_1^2\delta^2 - \frac{4p}{p-1}}{8-4p\chi_1\delta}}_{:=C_1}. \tag{4-95}$$

De (4-92), (4-94) y (4-95) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(n+1)^p}{\delta-c} \leq -p(p-1)C_1\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2 + \mu_1 p\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1$$

para todo $t > t_0$.

Integrando sobre (t_0,t) en la anterior desigualdad y usando el Teorema Fundamental del Cálculo llegamos a que

$$\begin{aligned}
p(p-1)C_1\int_{t_0}^t\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-2}}{\delta-c}|\nabla n_1|^2 \leq{}& \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p(x,t_0)}{\delta-c(c,t_0)}dx + \mu_1 p\int_{t_0}^t\int_\Omega \frac{(n_1+1)^{p-1}}{\delta-c}n_1 \\
&- \int_\Omega \frac{(n_1+1)^p(x,t)}{\delta-c(c,t)}dx.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta el Lema 4.7.6 y usando el Lema 4.7.7 tendríamos una cota C_2 para la parte derecha de la anterior desigualdad. Más aún, teniendo en cuenta que $\frac{1}{\delta-c} \leq \frac{1}{\delta}$, vemos que

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} (n_1+1)^{p-2} |\nabla n_1|^2 \leq \frac{\delta C_2}{p(p-1)C}.$$

De lo anterior y teniendo en cuenta que n es acotada y suave en $\overline{\Omega} \times [1, t_0]$, demostramos lo deseado.

■

Lema 4.10.2. La función u del sistema (4-1) cumple la convergencia

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty. \tag{4-96}$$

Además,

$$\int_{1}^{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 < \infty. \tag{4-97}$$

Demostración:

Multiplicando por u a la cuarta ecuación de (4-1), integrando sobre Ω y usando los razonamientos hechos en (4-38), (4-40) y (4-41), vemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi \cdot u. \tag{4-98}$$

Del razonamiento hecho en (4-42) tenemos que

$$\int_{\Omega} (\gamma n_1 + \delta n_2) \nabla \phi \cdot u = -\int_{\Omega} \phi u \cdot \nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)$$

para cada $t > 0$. Ahora, de la desigualdad de Poincare, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \tag{4-99}$$

para todo $t > 0$. Luego, usando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = \frac{C_1}{2}$, tenemos

$$-\int_{\Omega} \phi u \cdot \nabla(\gamma n_1 + \delta n_2) \leq \frac{1}{2C_1} \int_{\Omega} |u|^2 + C_2 \int_{\Omega} |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2,$$

donde $C_2 := \frac{C_1 \|\phi\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2}$. De (4-99) y por la desigualdad anterior notamos que

$$-\int_{\Omega} \phi u \cdot \nabla(\gamma n_1 + \delta n_2) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + C_2 \int_{\Omega} |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2$$

Reemplazando en (4-98) conseguimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2$$

para todo $t > 0$. Integrando la anterior desigualdad sobre $(1, t)$ con $t > 1$ y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2 - \int_\Omega |u(\cdot,1)|^2\right) + \frac{1}{2}\int_1^t \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq C_2 \int_1^t \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2 \\ &\leq C_2 \int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2.\end{aligned}$$

Dada la no negatividad del término $\int_\Omega |u(\cdot,t)|^2$, de lo anterior obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_1^t \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u(\cdot,1)|^2 + C_2 \int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2.$$

Por el Lema 4.10.1 con $p = 2$, vemos que

$$\int_1^\infty \int_\Omega |\nabla(\gamma n_1 + \delta n_2)|^2 < \infty, \tag{4-100}$$

de lo cual implica (4-97) como se quería. Por otro lado, sea $y(t) := \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ con $t \geq 0$ y definamos $h(t) := 2C_2 \int_\Omega |\nabla n(x,t)|^2 dx$ con $t > 0$ y denotemos $C_3 := \frac{1}{C_1}$. Entonces,

$$y'(t) \leq -C_3 y(t) + h(t)$$

para todo $t > 0$. Ahora, tomemos $t > 1$ y fijemos $s \in (1, t)$, entonces

$$y'(s)e^{-C_3(t-s)} \leq -C_3 y(s) e^{-C_3(t-s)} + e^{-C_3(t-s)} h(s).$$

Como $\left(y(s)e^{-C_3(t-s)}\right)' = y'(s)e^{-C_3(t-s)} + C_3 y(s) e^{-C_3(t-s)}$, vemos que

$$(y(s)e^{-C_3(t-s)})' \leq e^{-C_3(t-s)} h(s).$$

Integrando la anterior desigualdad sobre $(1, t)$ y aplicando el Teorema Fundamental del Calculo tenemos que

$$y(t) \leq e^{-C_3(t-1)} y(1) + \int_1^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds.$$

Si tomamos $t > 2$, observamos que

$$\begin{aligned}\int_1^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds &= \int_1^{\frac{t}{2}} e^{-C_3(t-s)} h(s) ds + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-C_3(t-s)} h(s) ds \\ &\leq e^{-\frac{C_3 t}{2}} \int_1^\infty h(s) ds + \int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) ds.\end{aligned}$$

Sabemos que $\int_1^\infty h(s) ds < \infty$ por (4-100), garantizándose así que $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ como se quería. ∎

Lema 4.10.3. La función u del sistema (4-1) verifica

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty. \tag{4-101}$$

Demostración:

Dado que $W^{1,r}(\Omega)$ está compactamente embebido en $L^\infty(\Omega)$ para todo r y como $L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, entonces aplicando la desigualdad de Ehrling conseguimos que para $\delta > 0$ existirá una constante $C(\delta) > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,r}(\Omega)} + C(\delta)\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $t > 0$.
Tomando $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño y teniendo en cuenta la convergencia conseguida en (4-96), bastaría demostrar que la función $t \to \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,r}(\Omega)}$ es acotada y conseguiríamos (4-101). Para tal fin, tomemos $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha > 1 - \frac{1}{r}$. Entonces, $\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$. Por lo tanto, podemos fijar $p \in (1,2)$ lo suficientemente cercano a 2 tal que

$$\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} > \frac{1}{p}.$$

Podemos ahora considerar el operador de Stokes A con dominio $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^p_\sigma(\Omega)$. Entonces, tomando el α definido anteriormente, vemos que $D(A^\alpha) \hookrightarrow W^{1,r}(\Omega)$. Luego, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C_1 \|A^\alpha \varphi\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4-102}$$

para todo $\varphi \in D(A^\alpha)$. Reescribiendo la cuarta ecuación del sistema (4-1) como

$$u_t = \Delta u + \nabla P + \underbrace{\left(\underbrace{-(u\cdot\nabla)u}_{:=h_1(x,t)} + \underbrace{(\gamma n_1 + \delta n_2)\nabla\phi}_{:=h_2(x,t)} \right)}_{:=h(x,t)}.$$

Ahora observemos que del Lema 4.7.7 podemos acotar la función h_2 por una constante $C_2 > 0$ como sigue

$$\|h_2(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2,$$

para cada $t > 1$. De igual forma, usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{2}{p} > 1$ y $\frac{2}{2-p}$, la desigualdad de Cauchy, la inclusión $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{2-p}}(\Omega)$ y el Lema 4-96, garantizamos acotar la función h_1 por una constante $C_3 > 0$ como sigue

$$\begin{aligned}
\|h_1(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq & \| \left[(u\cdot\nabla)\, u\right](\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \\
= & \| |u\cdot\nabla u|^p(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
= & \| \left(|u|^p|\nabla u|^p\right)(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
\leq & \|u(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq & \; C_3,
\end{aligned}$$

para todo $t > 1$. Ahora, recordemos que al usar la fórmula de variación de parámetros con $k \geq 1$ un entero arbitrario y $t > k$ vemos que

$$u(\cdot, t) = e^{-(t-k)A}u(\cdot, k) + \int_k^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}[h](\cdot, s)ds. \tag{4-103}$$

Así mismo, sabemos que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-tA}\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 t^{-\alpha}\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \tag{4-104}$$

para cada $\varphi \in L^p_\sigma(\Omega)$ y para todo $t > 0$. Empleando estos hechos, recordando que $\mathbb{P}$ es un operador acotado de $L^p(\Omega)$ a $L^p_\sigma(\Omega)$, aplicando A^α a cada lado de (4-103) y utilizando la desigualdad (4-104), obtenemos que

$$\|A^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4(t-k)^{-\alpha}\|u(\cdot, k)\|_{L^p(\Omega)} + C_4\int_k^t (t-s)^{-\alpha}\|h(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega)}ds, \tag{4-105}$$

para cada $t > k$. De ahí, sabemos por el Lema 4.10.2 y del hecho que $p < 2$, que $C_5 := \sup_{t>0}\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}$ es finito. Entonces, de (4-105) tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq& C_4 C_5 (t-k)^{-\alpha} + C_4\left(C_2 + C_3\right)\int_k^t (t-s)^{-\alpha}ds \\ \leq& C_4C_5 + C_4(C_2 + C_3)\cdot\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

para todo $t \in [k+1, k+2]$. Por lo tanto, como $k \geq 1$ fue arbitrario y teniendo en cuenta la desigualdad (4-102), conseguimos que el mapeo $t \to \|u(\cdot, t)\|_{W^{1,r}(\Omega)}$ sea acotado, culminando la demostración. ■

Prueba del Teorema 4.2.2

Observemos que los Lemas (4.8.7), (4-84) y (4.10.3) implican directamente el Teorema 4.2.2. Esto concluye la prueba.

Bibliografía

[1] Hirata, M., Kurima, S., Mizukami, M., Yokota, T. (2017). Boundedness and stabilization in a two-dimensional two-species chemotaxis-Navier–Stokes system with competitive kinetics. Journal of Differential Equations, 263(1), 470-490.

[2] Sheldon Axler, *Measure, Integration and Real Analysis,* 2021.

[3] Xavier Mora, *Semilinear parabolic problems define semiflows on C^k spaces*, 1983.

[4] David Gilbarg, *Elliptic partial differential equations of second order*, 1998.

[5] Michael Winkler, *Aggregation vs global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model.*

[6] Lawrance C. Evans, *Partial Differential Equations* V.19

[7] S.D. Éïdel'man y S.D. Ivasishen, *Investigation of the Green Matrix for a homogeneus paarabolic boundary value problem*, Trudy Moskov. Mat. ObSc. Z3 179-234 = Trans. Moscow Math. Soc. 23 (1970), 179-242.

[8] Roger Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis, volume 343. American Mathematical Society*, 2001.

[9] Youshan Tao, Michael Winkler *Blow-up prevention by quadratic degradation in a two-dimensional Keller–Segel–Navier–Stokes system*, 2016.

[10] L. Nirenberg *On elliptic partial differential equations*, 1959.

[11] Gerand B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* , 1999.

[12] Haim Brezis *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2011.

[13] Walter Rudin *Functional Analysis*, 1991.

[14] James R. Munkres *Analysis on manifolds.*

[15] McSherry EA, Donatello S, Hopkins AM, McDonnell S. Molecular basis of invasion in breast cancer. Cell Mol Life Sci. 2007; 64:3201–3218. [PubMed: 17957337]

[16] Condeelis J, Singer RH, Segall JE. The great escape: when cancer cells hijack the genes for chemotaxis and motility. Annu Rev Cell Dev Biol. 2005; 21:695–718. [PubMed: 16212512]

[17] Banach S, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, 1922.

[18] Lotka Alfred *Contribution to the Theory of Periodic Reactions*, 1910.

[19] Kevin Painter, *Mathematical models for chemotaxis and their applications in self-organisation phenomena*, 2018.

[20] Julius, A. *Chemotaxis in bacteria. Journal of Supramolecular Structure*

[21] Ford, R. M. Lauffenburger, D. A. Measurement of bacterial random motility and chemotaxis coefficients: II. Application of single-cell-based mathematical model. Biotechnol. Bioeng. 37, 661–672 (1991).

[22] Salek, M.M., Carrara, F., Fernandez, V. et al. Bacterial chemotaxis in a microfluidic T-maze reveals strong phenotypic heterogeneity in chemotactic sensitivity. Nat Commun 10, 1877 (2019). https://doi.org/10.1038/s41467-019-09521-2

[23] Dong Li, Xiaolong He, Xinping Li, Shangjiang Guo, Traveling wavefronts in a two-species chemotaxis model with Lotka–Volterra competitive kinetics, Applied Mathematics Letters, Volume 114, 2021, 106905, ISSN 0893-9659, https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106905.

[24] Hunt, Richard A.; Weiss, Guido (1964). The Marcinkiewicz interpolation theorem. Proceedings of the American Mathematical Society. doi:10.1090/S0002-9939-1964-0169038-4.

[25] Sohr, H. (2012). The Navier-Stokes equations: An elementary functional analytic approach. Springer Science Business Media.

[26] Fiorenza, A., Formica, M. R., Roskovec, T. G., Soudský, F. (2021). Detailed proof of classical Gagliardo–Nirenberg interpolation inequality with historical remarks. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 40(2), 217-236.

[27] K. Yosida. Functional Analysis, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[28] M. Wiegner. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations in Rn . J. London Math. Soc., 35 (1987), 303–313.

[29] T. Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with application to weak solutions. Math. Z., 187 (1984), 471–480.

[30] Bullock, G. L. (1988). A Geometric Interpretation of the Riemann-Stieltjes Integral. The American Mathematical Monthly, 95(5), 448–455. doi:10.1080/00029890.1988.11972030

[31] Knapp, A., [1] Basic Real Analysis, Birkhäuser, 2005, [2] Advanced Real Analysis, Birkhäuser, 2005.

[32] Winkler, M. (2016). How far do chemotaxis-driven forces influence regularity in the Navier-Stokes system? Transactions of the American Mathematical Society, 369(5), 3067–3125. doi:10.1090/tran/6733

[33] J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Éditions de l' Acad. Tchécoslovaque des Sciences, Prague, 1967.

[34] S. Agmon. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nos- trand Comp., New York, 1965.

[35] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[36] A. Friedman. Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Win- ston, New York, 1969

[37] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, 2nd ed., 1959

[38] Grigor'yan A. - Heat kernel and analysis on manifolds-American Mathematical Society (2009)

[39] (Modern Birkhäuser Classics) Alessandra Lunardi (auth.) - Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems-Springer Basel (1995)

[40] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.

[41] M. Mizukami, T. Yokota, Global existence and asymptotic stability of solutions to a two-species chemotaxis system

[42] Negreanu, M., Tello, J. I. (2014). On a two species chemotaxis model with slow chemical diffusion. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 46(6), 3761-3781.

[43] M. Negreanu, J.I. Tello, Asymptotic stability of a two species chemotaxis system with non-diffusive chemoattrac- tant, J. Differential Equations 258 (2015) 1592–1617.

[44] C. Stinner, J.I. Tello, M. Winkler, Competitive exclusion in a two-species chemotaxis model, J. Math. Biol. 68 (2014) 1607–1626.

[45] T. Black, J. Lankeit, M. Mizukami, On the weakly competitive case in a two-species chemotaxis model, IMA J. Appl. Math. 81 (2016) 860–876.

[46] M. Mizukami, Boundedness and asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal- dependent sensitivity, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B (2017), http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2017097, in press.

[47] C. Stinner, J.I. Tello, M. Winkler, Competitive exclusion in a two-species chemotaxis model, J. Math. Biol. 68 (2014) 1607–1626.

[48] Jin, H. Y., Xiang, T. (2017). Convergence rates of solutions for a two-species chemotaxis-Navier-Stokes sytstem with competitive kinetics. arXiv preprint arXiv:1707.09622.

[49] Cao, X., Kurima, S., Mizukami, M. (2018). Global existence and asymptotic behavior of classical solutions for a 3D two-species chemotaxis-Stokes system with competitive kinetics. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(8), 3138–3154. doi:10.1002/mma.4807

[50] Cao, X., Kurima, S., Mizukami, M. (2018). Global existence and asymptotic behavior of classical solutions for a 3D two-species chemotaxis-Stokes system with competitive kinetics. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(8), 3138–3154. doi:10.1002/mma.4807 with any chemical diffusion, J. Differential Equations 261 (2016) 2650–2669.

[51] J. Lankeit, Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source, Math. Models Methods Appl. Sci. 26 (2016) 2071–2109.

[52] D. Horstmann, M. Winkler, Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system, J. Differential Equations 215 (2005) 52–107.

[53] Mizukami, M. (2017). Boundedness and asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal-dependent sensitivity. Discrete Continuous Dynamical Systems-B, 22(6), 2301.

[54] M. Winkler, Boundedness in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Chemotaxis System with Logistic Source, Commun. Partial. Differ. Equ., 2010, 35, 1516–1537.

[55] Winkler, M. (2010). Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller–Segel model. Journal of Differential Equations, 248(12), 2889–2905. doi:10.1016/j.jde.2010.02.008

[56] Charles F. Fefferman, Existence and smoothness of the Navier-Stokes Equation.

[57] An Initiation to Logarithmic Sobolev Inequalities

[58] Porzio, M. M., Vespri, V. (1993). Holder Estimates for Local Solutions of Some Doubly Nonlinear Degenerate Parabolic Equations. Journal of Differential Equations, 103(1), 146–178. doi:10.1006/jdeq.1993.1045.

[59] Folland, G. B. (2016). A course in abstract harmonic analysis (Vol. 29). CRC press.

[60] Dombrowski, C., Cisneros, L., Chatkaew, S., Goldstein, R. E., Kessler, J. O. (2004). Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. Physical review letters, 93(9), 098103.

[61] I. Tuval, L. Cisneros, C. Dombrowski, C. W. Wolgemuth, J. O. Kessler, and R. E. Goldstein. Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. PNAS, 102(7):2277 – 2282, February 2005.

[62] Liu, J. G., Lorz, A. (2011). A coupled chemotaxis-fluid model: global existence. In Annales de l'IHP Analyse non linéaire (Vol. 28, No. 5, pp. 643-652).

[63] Duan, R., Lorz, A., Markowich, P. (2010). Global solutions to the coupled chemotaxis-fluid equations. Communications in Partial Differential Equations, 35(9), 1635-1673.